RANKI İKİ OLAN SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİ İÇİN BİR KOMUTATÖR TESTİ

Zerrin ESMERLİGİL

Çukurova Üniversitesi, Matematik Bölümü, Adana, 03223386084-2451, 03223386070, e-zerrin@cu.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada rankı iki olan serbest metabelyen Lie cebirlerinde verilen iki elemanlı bir kümenin, serbest üreteç kümesi olup olmadığını belirleyen bir kriter geliştirilmiştir.

Anahtar sözcükler: Serbest Lie cebiri,komütatör, Metabelyen Lie cebiri
AMS (2000) konu sınıflandırması: 17 B01, 17 B40

1. Giriş

W. Dicks [5]' de, rankı iki olan serbest asosyatif cebirlerde iki elemanlı bir kümenin bir üreteç kümesi olup olmadığını belirleyen bir komutatör testi vermiştir. Bu kriterin bir benzeri [3]' de Drensky tarafından rankı iki olan serbest cebirler için verilmiştir. Drensky, bir K cismi üzerinde x ve y gibi iki eleman tarafından üretilen serbest cebirlerin bazı sınıfları için aşağıdaki kriteri geliştirmiştir:
Bir Φ endomorfizminin otomorfizm olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$[\Phi(x),\Phi(y)] = \alpha[x,y] Bir 0 \neq \alpha \in K için$$

olmasıdır.

V. Drensky ve C. K. Gupta [4]' de karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki Lie cebirlerinin otomorfizm grubu için bir minimal üreteç kümesi bulmuşlardır.
Serbet Lie cebirlerinin otomorfizm grupları, cebirin serbest üreteç kümelerinin tanımlanmasında büyük rol oynar. İki üreteçli serbest metabelyen Lie cebirlerinin otomorfizmleri [3] ve [9]' da tanımlanmıştır. Bu otomorfizmlerin yapısının bilinmesi serbest üreteç kümelerinin de belirlenmesini sağlamıştır. Bu çalışmada, rankı iki olan serbest metabelyen Lie cebirlerinde verilen iki elemanlı bir kümenin serbest üreteç kümesi olup olmadığını belirleyen bir kriter geliştirilmiştir.

2. Temel Bilgiler

K karakteristiği sıfır olan bir cisim ve F de K üzerinde $X=\{x_1,...,x_n\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. F ’ cebirinin evrensel enveloping cebirini $U(F)$ ile gösterelim. $U(F)$ üreteç kümesi X olan bir serbest asosyatif cebirdir. [6]’ da Fox serbest grup halkalarında türevi tanımlayarak özelliklerini incelemiştir. Herhangi serbest bir asosyatif cebir, bir serbest grup cebirine doğal olarak gömüldüğünden, teknik sonuçların çoğu serbest asosyatif cebirler için de geçerlidir. F', F cebirinin türetilmiş alt cebiri ve F'' de F' cebirinin türetilmiş alt cebiri olsun.

$u \in U(F)$ ve $x_i \in X$ olmak üzere $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ile sol Fox türevini gösterelim.

Burada $\frac{\partial}{\partial x_i}$ operatörleri $i=1,...,n$ için $\frac{\partial}{\partial x_i}:U(F)\to U(F)$ şeklindeki lineer dönüşümlerdir. $\varepsilon : U(F)\to K$ her $x_i \in X$ için $\varepsilon(x_i)=0$ olarak tanımlanan homomorfizm olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanırlar:

i) $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}=\delta_{ij}$ (Kronecker delta),

ii) $u,v\in U(F)$ için $\frac{\partial (uv)}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i}\varepsilon(v)+u\frac{\partial v}{\partial x_i}$.

$U\left(F/F''\right)$ üzerinde tanımlı olan $\frac{\partial}{\partial x_i}$ dönüşümlerinin aldığı değerler $U\left(F/F''\right)$ cebiri içindedir. Dolayısıyla her $u=\bar{u}+F''\in \frac{F}{F''}$ için $\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}+\Delta_{F'}$ olur. Burada $\Delta_{F'}, U(F)$’ de F' tarafından üretilen sağ idealdir.

ε homomorfizminin çekirdeğini Δ ve R, F’nin bir ideali ise $U(F)$’de R tarafından üretilen sağ ideali Δ_R ile gösterelim.

$f,u,v\in F$ ve $f=[u,v]$ olsun. Fox türevleri için zincir kuralından

$$\frac{\partial [u,v]}{\partial x_i}=u\frac{\partial v}{\partial x_i}-v\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Bu çalışmada aşağıdaki teknik önermelerden yararlanacağız.

Önerme 1: $J, U(F)$ *nin bir ideali ve* $u \in \Delta$ *olsun.* $u \in J\Delta$ *olması için gerek ve yeter koşul* $i = 1,...,n$ *için* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in J$ *olmasıdır.*

Aşağıdaki önerme temel tanım ve sonuçlardan elde edilebilir.

Önerme 2: R, F *' nin bir ideali ve* $u \in F$ *olsun.* $u \in \Delta_R \Delta$ *olması için gerek ve yeter koşul* $u \in R'$ *olmasıdır.*

Lemma 3: $v_1,...,v_m, u \in F$ olsun. Eğer u , $U(F)$'nin $v_1,...,v_m$ tarafından üretilen sağ idealine aitse o zaman F 'nin $v_1,...,v_m$ tarafından üretilen altcebirine de aittir.

Bundan sonra bu çalışmada söz konusu olan bütün serbest Lie cebirleri, karakteristiği 0 olan bir K cismi üzerindeki Lie cebirleri olarak düşünülecektir.

3. Rankı iki Olan Serbest Metabelyen Lie Cebirleri

F , $\{x, y\}$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve L de rankı 2 olan serbest metabelyen Lie cebiri olsun. L 'yi F/F'' ile özdeşleştirip $L = F/F''$ yazacağız. Ayrıca $v, w \in F$ olmak üzere $\operatorname{ad} v(w) = [v, w]$ notasyonunu kullanacağız. $f, g \in F$ için $\operatorname{ad}([f, g]) =$ $[\operatorname{ad}(f), g]$ $+[f, \operatorname{ad} v(g)]$ olduğu Jacobi özdeşliğinden kolaylıkla görülebilir. O halde $ad(v), F$ 'nin bir türevidir.

Bir H Lie cebirinin bir δ nilpotent türevi için

$$e^{\delta}(w) = w + \frac{\delta(w)}{1!} + \frac{\delta^2(w)}{2!} + ...$$

ile tanımlanan e^{δ} dönüşümü bir Lie cebiri otomorfizmidir. Bir $v \in F'/F''$ için $(adv)^2 = 0$ olup e^{adv} bir otomorfizmdir. Bu otomorfizme L' nin bir iç otomorfizmi denir. Serbest metabelyen Lie cebirlerinin otomorfizmleri ile ilgili ayrıntılar [3]' te bulunabilir.

Önerme 4: L *' nin her otomorfizmi bir iç ve bir lineer otomorfizmin bileşkesidir.*

Bu çalışmanın temelini oluşturan kriter aşağıdaki şekildedir.

Teorem 5: $H=\{h_1,h_2\}$, L nin bir altkümesi olsun. O zaman H' nin L için bir üreteç kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul bir $0\neq\alpha\in K$ için $[h_1,h_2]\equiv\alpha[x,y]+F''$ olmasıdır.

İspat: $[h_1,h_2]\equiv\alpha[x,y]+F'', 0\neq\alpha\in K$ olsun. Her iki tarafın Fox türevini alırsak, Önerme 1 ve Önerme 2'den

$$h_1\frac{\partial h_2}{\partial x}-h_2\frac{\partial h_2}{\partial x}=-\alpha y+\Delta_{F'}$$

$$h_1\frac{\partial h_2}{\partial y}-h_2\frac{\partial h_2}{\partial y}=\alpha x+\Delta_{F'}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$y\equiv\left(h_1\left(-\alpha^{-1}\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)+h_2\left(\alpha^{-1}\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)\right)+\Delta_{F'}$$

ve

$$x\equiv\left(h_1\left(\alpha^{-1}\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)+h_2\left(-\alpha^{-1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\right)+\Delta_{F'}$$

olduğu görülür.

O halde x ve y, $U(L)$' nin h_1 ve h_2 tarafından üretilen sağ idealine aittirler. Buradan Lemma 3 gereğince x ve y, L nin h_1 ve h_2 tarafından üretilen alt cebirine olur. Böylece $H=\{h_1,h_2\}$ kümesinin L nin bir üreteç kümesi olduğu sonucuna varılır.

Şimdi $H=\{h_1,h_2\}$, L nin bir üreteç kümesi olsun. O zaman $\Phi(x+F'')=h_1$ ve $\Phi(y+F'')=h_2$ olacak şekilde L nin bir Φ otomorfizmi vardır. [2] Önerme 3'ten L nin bir otomorfizmi bir iç ve bir lineer otomorfizmin bileşkesi olduklarından, $\Phi=e^{adu}\tau$ olacak şekilde L nin bir τ lineer otomorfizmi ve bir e^{adu} iç otomorfizmi vardır. e^{adu} bir iç otomorfizm olduğundan $u\in L'$ olduğu açıktır. τ otomorfizminin $\tau(x)=ax+by, \tau(y)=cx+dy$ olarak tanımlandığını kabul edelim. Burada $a,b,c,d\in K$ ve $ad-bc\neq 0$ dır.

Şimdi h_1 ve h_2 elemanlarının yapısını belirleyelim.

$$h_1=\Phi(x+F'')=\left(e^{adu}\tau\right)(x+F'')=(1+adu)(ax+by)+F''$$

$$=ax+by+[u,ax+by]+F''$$

ve

$$h_2 = \Phi\left(y + F''\right) = \left(e^{adu}\tau\right)\left(y + F''\right) = \left(1 + adu\right)\left(cx + dy\right) + F''$$

$$= cx + dy + \left[u, cx + dy\right] + F''$$

dir.

Şimdi $\left[h_1, h_2\right]$ elemanını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\left[h_1, h_2\right] = \left(ad - bc\right)\left[x, y\right] + a\left[x, \left[u, cx + dy\right]\right] + b\left[y, \left[u, cx + dy\right]\right] \\
+ c\left[\left[u, ax + by\right], x\right] + d\left[\left[u, ax + by\right], y\right] \\
+ \left[\left[u, ax + by\right], \left[u, cx + dy\right]\right] + F''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(ad - bc\right)\left[x, y\right] + a\left(\left[\left[cx + dy, x\right], u\right] + \left[\left[x, u\right], cx + dy\right]\right) \\
&+ b\left(\left[\left[cx + dy, y\right], u\right] + \left[\left[y, u\right], cx + dy\right]\right) \\
&+ c\left(-\left[\left[ax + by, x\right], u\right] - \left[\left[x, u\right], ax + by\right]\right) \\
&+ d\left(-\left[\left[ax + by, y\right], u\right] - \left[\left[y, u\right], ax + by\right]\right) \\
&+ \left[\left[u, ax + by\right], \left[u, cx + dy\right]\right] + F'' \\
&= \left(ad - bc\right)\left[x, y\right] + \left[\left[x, u\right], \left(ad - bc\right), y\right] + \left[\left[y, u\right], \left(bc - ad\right)x\right] \\
&+ a\left[\left[cx + dy, x\right], u\right] + b\left[\left[cx + dy, y\right], u\right] \\
&- c\left[\left[ax + by, x\right], u\right] - d\left[\left[ax + by, y\right], u\right] \\
&+ \left[\left[u, ax + by\right], \left[u, cx + dy\right]\right] + F'' \\
&= \left(ad - bc\right)\left[x, y\right] + \left(ad - bc\right)\left[\left[x, y\right], u\right] \\
&+ a\left[\left[cx + dy, x\right], u\right] + b\left[\left[cx + dy, y\right], u\right] \\
&- c\left[\left[ax + by, x\right], u\right] - d\left[\left[ax + by, y\right], u\right] \\
&+ \left[\left[u, ax + by\right], \left[u, cx + dy\right]\right] + F''
\end{aligned}$$

Böylece

$$\left[h_1, h_2\right] \equiv \left(ad - bc\right)\left[x, y\right] + F''$$

elde edilir.

F_m, F serbest Lie cebirinin m-yinci dereceden alt merkezi terimi olsun. m-yinci sınıftan serbest nilpotent F/F_m Lie cebirini M ile gösterelim.

Sonuç 6: $H=\{h_1,h_2\}$, $M/M_{2,2}$ cebirinin bir alt kümesi olsun. O zaman H kümesinin $M/M_{2,2}$ cebirinin bir serbest üreteç kümesi olması için gerek ve yeter koşul $0\neq\alpha\in K$ için

$$[h_1,h_2]\equiv\alpha[x,y]+M''$$

olmasıdır.

Serbest metabelyen Lie cebirleri için elde ettiğimiz bu kriter bazı Lie cebirleri için geçerli olmayabilir. Örneğin, F/F'_m cebirini ele alalım. Bu cebirin bir $H=\{h_1,h_2\}$ alt kümesi için $[h_1,h_2]\equiv\alpha[x,y]+F'_m$ olduğu halde H kümesi bir serbest üreteç kümesi olmayabilir. Bunu aşağıdaki örnekle görebiliriz.

Örnek: F, $\{x,y\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun.
$R=F''$ alalım. $F/R'=F/F'''$ nün

$$\Phi: x\to x+ar$$
$$\quad y\to y+ar$$

endomorfizmini düşünelim. $\bar{r}=r+R'\in R/R'$ ve
$\bar{a}=a+\Delta_R,\bar{b}=b+\Delta_R\in U(F/R)=U(F/F'')$ olacak şekildeki a,b elemanlarını
$a=[x,y].x.[x,y],b=[x,y].y.[x,y]$ olarak seçelim.
$h_1=x+ar+R',h_2=y+br+R'$ diyelim. $[h_1,h_2]$ elemanı hesaplanırsa

$$[h_1,h_2]=[x,y]+[ar,y]+[x,br]+R'$$

bulunur.

$[ar,y]+[x,br]\in R'$ olduğunu gösterelim:
$c=[x,y]$ diyelim.

$$\begin{aligned}[ar,y]+[x,br]&=ary-yar+xbr-brx\\&=cxcry-ycxcr+xcycr-cycrx\\&=cxcry-cycrx-(ycxc-xcyc)r\\&=c(xcry-ycrx)-[yc,xc]r\end{aligned}$$

$$= c\left(xcry - yxcr + yxcr - ycrx\right) - \left[yc, xc\right]r$$
$$= c\left[xcr, y\right] + cy\left(xcr - crx\right) - \left[yc, xc\right]r$$
$$= c\left[xcr, y\right] + cy\left[x, cr\right] - \left[yc, xc\right]r \;.$$

$R/R', U\left(F/R\right)$-modül olduğundan $xcr + R' \in R/R'$ ve $c\left[xcr, y\right] + R' \in F/R'$ dir.
Benzer şekilde $cy\left[x, cr\right] + R', \left[yc, xc\right]r + R' \in F/R'$ dir. O halde
$A = c\left[xcr, y\right] + cy\left[x, cr\right] - \left[yc, xc\right]r \in F$ ve $A \in \Delta_R \Delta$ dır. Buradan $A \in R'$ olduğu görülür.
O halde $a = \left[x, y\right].x.\left[x, y\right]$ ve $b = \left[x, y\right].y.\left[x, y\right]$ olarak seçilen a, b için
$\left[ar, y\right] + \left[x, br\right] \in R'$ elde edilir.

Şimdi $\{h_1, h_2\}$ kümesinin L için bir serbest üreteç kümesi olduğunu varsayalım. O zaman $\Phi : x + R' \to h_1, y + R' \to h_2$ olarak tanımlanan otomorfizm bir iç otomorfizm olup bir $v + R' \in R/R'$ için
$x + \left[v, x\right] + R' = x + ar + R'$ ve $y + \left[v, y\right] + R' = y + br + R'$

olup

$\left[v, x\right] + R' = ar + R'$ ve $\left[v, y\right] + R' = br + R'$

elde edilir. Birinci eşitliği y, ikinci eşitliği x ile çarpalım.

$\left[\left[v, x\right], y\right] + R' = \left[ar, y\right] + R'$,

-$\left[\left[v, y\right], x\right] + R' = \left[x, br\right] + R'$

bulunur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$\left[ar, y\right] + \left[x, br\right] + R' = \left[\left[v, x\right], y\right] - \left[\left[v, y\right], x\right] + R'$

ve dolayısıyla

$\left[\left[v, x\right], y\right] - \left[\left[v, y\right], x\right] \in R'$

elde edilir. Jacobi özdeşliği kullanılırsa $\left[\left[x, y\right], v\right] \in R'$ bulunur. $v \in R \setminus R'$ olduğundan $\left[x, y\right] \in R$ çelişkisi elde edilir. O halde Φ bir otomorfizm olamaz. Yani $\{h_1, h_2\}$, R/R' cebirinin bir üreteç kümesi değildir.

Kaynaklar:

1. Bahturin,Yu., (1987), *An Identical Relations in Lie Algebras*, VNU Science Pres, Utrecht,.
2. Cohn, P.M., (1964), Subalgebras of Free Associative Algebras, *Proc. London Math. Soc.*,3,14,618-632.
3. Drensky, V., (1990), Automorphisms of Relatively Free Algebras, Comm. İn Alg., 18(12), 4323-4351.
4. Drensky, V., Gupta, C., (1990), Automorphisms of Free Nilpotent Lie Algebras, *Can.J. Math*.,XLII,No. 2,259-279.
5. Dicks, W., (1982), A commutator Test for two element to Generate the Free Algebra of Rank Two., *Bull. London Math. Soc*., 14, 48-51.
6. Fox, R.H., (1953), Free Differential Calculus I. Derivations in free Group Rings. *Ann. of Math*.,829, 57, 547-560.
7. Reutenauer, C., (1992), Applications of a Noncommutative Jacobian Matrix, *J. Pure Appl. Algebra,* 77, 169-181.
8. Shpilrain, V., (1993), On Generators of L/R^2 Lie Algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 119, 1039-1043.
9. Smelkin, A. L., (1973), Wreath Prducts of Lie Algebras and Their Application in The theory of Groups. *Trudy Moskow. Math. Obsch*., 29, 247-260.
   Transl: *Trans. Moscow Math. Soc*. (1973), 29, 239-252.