BİR GRAPHIN KOMŞULUK MATRİSİ İLE DERECE MATRİSİNİN ÇARPIMININ EN BÜYÜK ÖZDEĞERİ İÇİN SINIRLAR

Sezer SORGUN[1] ve Şerife BÜYÜKKÖSE[2]

[1] Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, KAYSERİ
srgnrzs@gmail.com
[2] Ahi Evran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,Matematik Bölümü, KIRŞEHİR
serifebuyukkose@gmail.com

ÖZET

Bu çalışmada $G=(V,E)$ bir graph ve $A(G)$ komşuluk matrisi, $D(G)$ noktaların dereceleri matrisi olmak üzere
$P(G)=A(G).D(G)$
çarpım matrisi tanımlanmış ve bu tanımlanan matrisin en büyük özdeğeri için sınırlar bulunmuştur.

Anahtar sözcükler: Graph, Komşuluk Matrisi , Özdeğer
AMS (2000) subject classification:05C50

1.Ön Bilgiler

$G=(V,E)$, noktalar kümesi $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ olan bir basit graph olsun. $v_i\in V$ olmak üzere v_i nin derecesi, d_i olarak tanımlanır. v_i noktasına komşu noktaların derecelerinin ortalaması da m_i olarak adlandırılır. G graphında bütün noktaların derecesi birbirine eşit ise graph regüler bir graph olur. Eğer G graphının her noktalarının derecesi k ise G ' ye $k-$regüler bir graph denir. Bir graphda bütün noktalar birbirine komşu ise graph tam graph olarak adlandırılır. Tam graphlar $(n-1)-$regülerdir. Bir G graphının komşuluk matrisi $A(G)=(a_{ij})$ şeklindedir öyle ki

$$a_{ij}=\begin{cases}1: & i\sim j\,(v_iv_j\in V)\\ 0 & :\textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

G basit graph olduğundan $A(G)$ her bir köşegen elemanı sıfır olan $(0,1)$ simetrik matristir.

$D(G)$, G graphının köşegen elemanları noktaların derecelerinden oluşan bir köşegen matris olmak üzere $L(G) = D(G) - A(G)$ şeklinde tanımlanan matris G graphının Laplace Matrisi olarak adlandırılır.

Literatürde G basit bir graph olmak üzere $A(G)$ ve $L(G)$ matrislerinin en büyük öz değerlerinin (spektral yarıçap) sınırları çalışılmıştır. Bunun yanı sıra $K(G) = D(G) + A(G)$ şeklinde bir matris oluşturulup bu matrisinde en büyük öz değeri için sınırlar bulunmuştur [4].

Biz bu çalışmamızda $P(G) = A(G)D(G)$ olacak biçimde bir $P(G)$ çarpım matrisini alarak, $P(G) = (p_{ij})$,

$$p_{ij} = \begin{cases} d_j : eğer\ i \sim j \\ 0 \ : diğer\ durumda \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlı n×n tipindeki bu matrisin öz değerlerine sınırlar bulmaya çalıştık.

2. P(G) Matrisinin Spektral Yarıçapı İçin Sınırları

Önerme 1 G graphı, k-regüler graph ise $P(G) = kA(G)$ dır.

İspat: G, k-regüler graph olduğundan her j noktası için $d_j = k$ dır. $A(G)$ komşuluk matrisi ve $P(G)$ çarpım matrisinin tanımlarından $P(G) = kA(G)$ olduğunu görmek kolaydır.

Teorem 2 G k-regüler bir graph ise k, G nin bir öz değeridir. Üstelik spektral yarıçapı k dır. Tersine olarak, maksimum derece G nin bir öz değeri ise G regüler olmalıdır [5].

Önerme 3 G, k-regüler bir graph olsun. $A(G)$ komşuluk matrisinin öz değerleri $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ ise $P(G)$' nin öz değerleri $(k\lambda_1, k\lambda_2, ..., k\lambda_n)$ dir.

İspat. G=(V,E), k-regüler graph olsun. $A(G)$ komşuluk matrisinin λ_1 öz değeri ve $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ de bu öz değere göre öz vektör alalım. λ_1, keyfi bir x_i öz bileşeni için bir öz değer olduğundan

$$\lambda_1 x_i = A(G)x_i$$

$$\lambda_1 x_i = \sum_j \{x_j : i \sim j\} \tag{1}$$

yazabiliriz.

Diğer taraftan $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, $P(G)$ matrisinin öz değerleri olsun. $P(G) = kA(G)$ ve $A(G)$ ile $P(G)$ nin öz vektörleri aynı olduğundan , x_i öz vektörünü β_1' e göre de öz vektör olarak alabiliriz. O halde

$$\beta_1 x_i = P(G)x_i$$
$$\beta_1 x_i = \sum_j \left\{ d_j x_j : i \sim j \right\}$$
$$\beta_1 x_i = k.\sum_j \left\{ x_j : i \sim j \right\} \tag{2}$$

yazabiliriz. (1) ve (2) den

$$k\lambda_1 x_i = \beta_1 x_i \Rightarrow k\lambda_1 = \beta_1$$

alabiliriz.

Benzer metotlar diğer öz değerler içinde uygulandığında, $\beta_i = k\lambda_i \ \left(1 \le i \le n\right)$ elde ederiz. Böylece $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = (k\lambda_1, k\lambda_2, ..., k\lambda_n)$ olduğu görülür.

Sonuç 4 G regüler bir graph olmak üzere, $A(G)$ komşuluk matrisinin spektral yarıçapı λ_1 ve $P(G)$ çarpım matrisinin spektral yarıçapı β_1 olsun. Bu taktirde $\lambda_1^2 = \beta_1$ dir.

İspat: Teorem 2 ve Önerme 3 den ispatı aşikardır.

Sonuç 5 G tam graph ise $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \left((n-1)\lambda_1, (n-1)\lambda_2, ..., (n-1)\lambda_n\right)$ dır.

İspat. G bir tam graph ise $(n-1)$-regüler graphtır. Önerme3 den $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \left((n-1)\lambda_1, (n-1)\lambda_2, ..., (n-1)\lambda_n\right)$ olduğu görülür.

Teorem 6 G bağlantılı graph ve λ_1, $A(G)$' nin spektral yarıçapı olsun. Bu taktirde, $T_i = \sum_j \left\{ d_j : v_i v_j \in E \right\} = d_i m_i$, $\quad TT_i = \sum_j \left\{ T_j : v_i v_j \in E \right\} = \sum_j \left\{ d_j m_j : \ v_i v_j \in E \right\}$; $\quad d_i$, v_i noktasının derecesi ve m_i, v_i noktasına komşu olan noktaların derecelerinin ortalaması olmak üzere

$$\lambda_1 \le \max \left\{ \frac{TT_i}{T_i} : \ 1 \le i \le n \right\} \tag{3}$$

dır. [1]

Teorem 7 G bağlantılı graph ve λ_1, $A(G)$' nin spektral yarıçapı olsun. Bu taktirde, $TT_i = \sum_j \left\{ d_j m_j : \ v_i v_j \in E \right\}$; d_i, v_i noktasının derecesi ve m_i, v_i noktasına komşu olan noktaların derecelerinin ortalaması olmak üzere

$$\lambda_1 \le \max \left\{ \sqrt{\frac{TT_i}{d_i}} : \ 1 \le i \le n \right\} \tag{4}$$

dır. [1]

Teorem 8 $G=(V,E)$ k-regüler graph ve β_1, $P(G)$ matrisinin spektral yarıçapı olsun. Bu taktirde,

$T_i=\sum_j\{d_j : v_iv_j\in E\}=d_im_i$, $TT_i=\sum_j\{T_j : v_iv_j\in E\}=\sum_j\{d_jm_j : v_iv_j\in E\}$; d_i, v_i noktasının derecesi ve m_i, v_i noktasına komşu olan noktaların derecelerinin ortalaması olmak üzere

$$\beta_1\le\max\left\{\frac{(TT_i)^2}{T_i^2-1} : 1\le i\le n\right\} \tag{5}$$

dir.

İspat. (4) eşitsizliğinden, $\lambda_1\le\max\left\{\sqrt{\frac{TT_i}{d_i}} :\ 1\le i\le n\right\}$ idi. G k-regüler olduğundan; $P(G)$ nin β_1 öz değeri için , $\beta_1=k\lambda_1$ yazılabilir ve (4) eşitsizliğinde yerine koyulursa,

$$\frac{\beta_1}{k}\le\max\left\{\sqrt{\frac{TT_i}{d_i}} :\ 1\le i\le n\right\}$$

$$\beta_1\le k.\max\left\{\sqrt{\frac{TT_i}{d_i}} :\ 1\le i\le n\right\}$$

elde edilir. G k-regüler olduğundan , $d_i=k$ dır ve $T_i=d_im_i=d_i^2$ olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten ,

$$T_i=\sum_j\{d_j : i\sim j\}=\sum_j\{k : i\sim j\}=k\sum_j\{1 : i\sim j\}=kd_i=k^2$$

eşitliği bulunur. Şimdi yukarıdaki eşitsizlikte,

$$k\sqrt{\frac{TT_i}{d_i}}=\frac{\sqrt{T_i}.\sqrt{TT_i}}{\sqrt[4]{T_i}}=\frac{\sqrt[4]{T_i^3}.\sqrt{TT_i}}{T_i}\le\frac{\sqrt{T_i^3}.TT_i}{T_i^2}=\frac{(TT_i)(TT_i)}{T_i^2}\le\frac{(TT_i)^2}{T_i^2-1},$$

düzenlemeleri yapılırsa,

$$\beta_1\le\max\left\{\frac{(TT_i)^2}{T_i^2-1} : 1\le i\le n\right\}$$

elde edilir.

Teorem 9 G bağlantılı graph ve β_1 , $P(G)$ ' nin spektral yarıçapı olsun. Bu taktirde, $T_i=\sum_j\{d_j :\ i\sim j\}$ olmak üzere

$$\beta_1\le\max\{T_i :\ 1\le i\le n\} \tag{6}$$

elde edilir. Eşitlik G graphının regüler olması durumunda sağlanır.

İspat. $P(G)$ matrisinin (i,j) elemanı;

$$p_{ij} = \begin{cases} d_j : eğer\ i \sim j \\ 0 \ \ : diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olarak tanımlıdır. Gersgorin Teoremi' ne göre [2] , $P(G)$' nin her bir öz değeri $R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |p_{ij}|$ olacak biçimde $\{\beta : |\beta - p_{ii}| \leq R_i\}$ diskinin en az birindedir. Böylece

$$\beta_1 \leq \max\left\{\sum_j \{d_j : i \sim j\}\right\} = \max\{T_i : 1 \leq i \leq n\}$$

yazabiliriz.

Şimdi eşitlik durumunu gösterelim. G graphı $k-$regüler olsun. Bu taktirde, $\forall 1 \leq i \leq n$ için

$$T_i = \sum_j \{d_j : i \sim j\} = k \sum_j \{1 : i \sim j\} = k.d_i = k^2$$

elde edilir. Sonuç 4 den ise eşitlik sağlandığı görülür.

Teorem 10 G bağlantılı graph ve β_1 , $P(G)$' nin spektral yarıçapı olsun. Bu taktirde,

$$\beta_1 \leq \max\left\{\frac{TT_i}{m_i} : 1 \leq i \leq n\right\} \tag{7}$$

Burada $TT_i = \sum_j \{d_j m_j : i \sim j\}$ ve m_i, i noktasına komşu noktaların derecelerinin ortalamasıdır. Eşitlik için gerek ve yeter koşul G graphının regüler bir graph olmasıdır.

İspat. $M(G)$ köşegen elemanları m_i den oluşan bir köşegen matris olmak üzere $M(G)^{-1}P(G)M(G)$ matrisinin (i, j) nci elemanı

$$\begin{cases} \dfrac{d_j m_j}{m_i} : eğer\ \ i \sim j \\ 0 \quad\ \ : \ diğer\ durumlarda \end{cases}$$

biçimindedir.

$M(G)^{-1}P(G)M(G)$ matrisinin satırlarına Gersgorin Teoremi uygulanırsa,

$$\beta_1 \leq \max\left\{\sum_j \left\{\frac{d_j m_j}{m_i} : i \sim j\right\} : 1 \leq i \leq n\right\}$$

$$= \max\left\{\frac{TT_i}{m_i} : 1 \leq i \leq n\right\}$$

elde ederiz.

Şimdi G k-regüler bir graph olsun. O halde $\forall i$ için $d_i = k$ dır.Bu taktirde,

$$m_i = \frac{1}{d_i}\sum_j \{d_j : i \sim j\} = \frac{1}{k}\sum_j \{k : i \sim j\} = k$$

ve

$$TT_i = \sum_j \{d_j m_j : i \sim j\} = k^2 \sum_j \{1 : i \sim j\} = k^3$$

olduğundan $\frac{TT_i}{m_i} = k^2$ elde edilir. Yine Sonuç4 kullanılırsa eşitlik görülür.

Teorem 11 G graphı n noktalı ve m kenarlı bağlantılı bir graph olsun. β_1, $P(G)$ matrisinin spektral yarıçapı ve m_i, i noktasına komşu noktaların derecelerinin ortalaması olmak üzere

$$\beta_1 \leq \left\{ \sqrt{m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right)m_i} : 1 \leq i \leq n \right\} \tag{8}$$

dir.

İspat. $D(G)$ elemanları noktaların derecelerinden oluşan bir köşegen matris olmak üzere, $D(G)^{-1}P(G)D(G)$ matrisini düşünelim. $D(G)^{-1}P(G)D(G)$ matrisinin (i,j) elemanı

$$\begin{cases} \frac{d_j^2}{d_i} : eğer\ \ i \sim j \\ 0 \quad : d.d. \end{cases}$$

biçiminde olur.

β_1 , $P(G)$ nin spektral yarıçapı ve $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, β_1' e göre bir öz vektörü alalım. x_i öz bileşeni 1 ($x_i = 1$) ve her k için $x_k \leq 1$ olsun. $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ öz vektörü için

$$D(G)^{-1}P(G)D(G)X = \beta_1 X \tag{9}$$

yazabiliriz.

(9) ifadesini i için yazarsak ;

$$\beta_1 x_i = \sum_j \left\{ \frac{d_j^2}{d_i} x_j \ \ i \sim j \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_1 = \sum_j \left\{ \frac{d_j^2}{d_i} x_j \ \ i \sim j \right\} \tag{10}$$

elde ederiz. Yine (9) ifadesini j için yazarsak ;

$$\beta_1 x_j = \sum_k \left\{ \frac{d_k^2 x_k}{d_j} \ \ k \sim j \right\} \tag{11}$$

elde ederiz. (11)' in her iki tarafını $\frac{d_j^2}{d_i}$ ile çarpıp , $i \sim j$ olacak biçimde j üzerinden her iki yanında toplamı alınırsa,

$$\beta_1^2 = \sum_j \left\{ \frac{d_j}{d_i} \sum_k \left\{ d_k^2 x_k \ \ k \sim j \right\} : i \sim j \right\}$$

olur.

Her k için $x_k \leq 1$ olduğundan,

$$\beta_1^2 \leq \sum_j \left\{ \frac{d_j}{d_i} \sum_k \left\{ d_k^2 \ \ k \sim j \right\} : i \sim j \right\} \tag{12}$$

yazılabilir. Diğer taraftan Caen Eşitsizliği [3] kullanılırsa,

$$\beta_1^2 \le \sum_j \left\{ \frac{d_j}{d_i} m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2 \right) : i \sim j \right\}$$
$$= m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2 \right) \sum_j \left\{ \frac{d_j}{d_i} : i \sim j \right\}$$
$$= \left\{ m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2 \right) m_i : 1 \le i \le n \right\}$$

ve buradan ise

$$\beta_1 \le \left\{ \sqrt{m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2 \right) m_i} : 1 \le i \le n \right\}$$

bulunur.

Sonuç 12 G graphı n noktalı ve m kenarlı bağlantılı bir graph olsun. β_1, $P(G)$ matrisinin spektral yarıçapı ve m_i, i noktasına komşu noktaların derecelerinin ortalaması olmak üzere, $\tilde{m} = \min\{m_i : 1 \le i \le n\}$ alalım. Bu taktirde,

$$\beta_1 \le \left\{ \sqrt{m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2 \right) \tilde{m}} : 1 \le i \le n \right\} \tag{13}$$

dir.

İspat Teorem 9 da $1 \le i \le n$ olmak üzere $\forall m_i$ için (8) deki sınır sağlandığından ve $\tilde{m} = \min\{m_i : 1 \le i \le n\} \in \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ olduğundan ispatı görmek kolaydır.

Teorem 13 G bağlantılı graph ve β_1 , $P(G)$' nin spektral yarıçapı olsun. Bu taktirde,

$$\beta_1 \le \max\left\{ \sqrt{\sum_j \sum_k \left\{ \left\{ d_k d_j : k \sim j \right\} : i \sim j \right\}} \right\} \tag{14}$$

dir.

İspat. β_1 öz değeri, $P(G)$ nin spektral yarıçapı ve $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, β_1' e göre bir öz vektörü alalım.

Bu öz vektörü , bir öz bileşeni 1' e eşit(x_i =1), diğer öz bileşenleri de 1'e eşit veya 1 den küçük kabul edebiliriz. Yani $x_i = 1$ ve bütün k ' lar için $x_k \le 1$ alabiliriz. $P(G)$ matrisi için

$$P(G)X = \beta_1 X \tag{15}$$

yazarız. (15)' un i . eşitliğinden ,

$$\beta_1 x_i = \sum_j \left\{ d_j x_j \;\; i \sim j \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_1 = \sum_j \left\{ d_j x_j \;\; i \sim j \right\} \tag{16}$$

j . eşitliğinden ise ,

$$\beta_1 x_j = \sum_k \left\{ d_k x_k \;\; k \sim j \right\} \tag{17}$$

elde ederiz. (17)' nin her iki tarafını d_j ile çarpıp , $i \sim j$ olacak biçimde j üzerinden toplam alınırsa,

$$\beta_1^2 = \sum_j \left\{ \sum_k \left\{ d_j d_k x_k \;\; k \sim j \right\} : i \sim j \right\}$$

elde ederiz.

Her k için $x_k \leq 1$ olduğundan,

$$\beta_1^2 \leq \sum_j \left\{ \sum_k \left\{ d_j d_k x_k \;\; k \sim j \right\} : i \sim j \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_1 \leq \sqrt{\sum_j \sum_k \left\{ d_j d_k \;\; k \sim j \right\}}$$

yazabiliriz.

Örnek 14 Noktaları $V_1 = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi, kenarları $E_1 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,5\},\{2,4\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$ kümesinden oluşan bir $G_1 = (V_1, E_1)$ graphını ve $V_1 = \{1,2,3,4\}$, $E_2 = \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{2,3\},\{3,4\}\}$ olmak üzere $G_2 = (V_2, E_2)$ graphını alalım.

Bu graphlar için , $\beta_1(P(G_1)) = 11,24$ ve $\beta_1(P(G_2)) = 6,62$ öz değerleri iki ondalıklı olarak verilsin. Yukarıda verilen graphların en büyük öz değerleri için (spektral yarıçapı) sınırlar aşağıdaki sonuçta verilmiştir:

	(6)	(7)	(13)	(14)
G_1	12	14	12,9	11,4
G_2	7	8,14	7,8	6,7

Sonuç: Biz şimdiye kadar $P(G) = A(G)D(G)$ matrisini oluşturarak, bu matrisin en büyük öz değeri için sınırlar bulduk. Bunun yanı sıra $P'(G) = D(G)A(G)$ matrisini de oluşturabiliriz. Kolaylıkla görülecektir ki $(P(G))^T = P'(G)$. Gerçekten ,

$$(P(G))^T = (A(G)D(G))^T = D(G)^T A(G)^T = D(G)A(G) = P'(G)$$

bulunur. Matris Teorisi'nden bir matrisin öz değerleri aynı zamanda transpozunun da öz değerleri olacağından verilen sınırlar $P'(G)$ için de geçerli olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Kinkar Ch. Das and Pawan Kumar, Bounds on the greatest eigenvalue of graphs, Indian J. pure appl. Math.,34(6)(2003),917-925.

[2] Marvin Marcus, Henryk Minc, A survey of Matrix Theory and matrix inequalities, Allyn and Bacon Inc., Boston (1964),146

[3] D. de Caen, An upper bound on the sum squares of degrees in a graph, Discrete Math. 185(1998), 245-248.

[4] Kinkar Ch. Das, A characterization on Graph which achieve the upper bounds for the largest Laplacian eigenvalue of a Graph, Linear Algebra Appl.,376(2004), 173-186.

[5] C.Godsil and G.Royle, Algebraic graph theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol.207, Springer, 2001