21. Ulusal Matematik Sempozyumu Bildiriler Kitabı F.1-9

Afin Harmonik Dönüşümler

Fatma Muazzez Şimşir
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Söğütözü Caddesi No:43
Ankara
msimsir@etu.edu.tr

September 15, 2008

1 Giriş

Bu çalışmanın amacı, harmonik dönüşümlerin Riemann,Kähler, Hermitiyen geometrileri ve özellikle de Afin geometrideki rolünü tasvir etmektir.

- Harmonik dönüşüm kavramı ilk olarak Bochner tarafından geliştirildi, [5].
- Hedef manifoldun eğriliğinin pozitif olmaması varsayımı ve Bochner tipi bir formül ve kullanışlı bir diferensiyel eşitsizlik ileriki yıllarda Al'ber ve Eels-Sampson'nun [1], [2] ve [8] bazı varlık sonuçları elde etmesine yardımcı oldu.
- Dahası Al'ber, [2] tekliği de ispatladı ve harmonik dönüşümlerin eğriliği pozitif olmayan manifoldların topolojisi hakkında nasıl bilgi verebileceğine dair ilk fikirleri ortaya attı. Preismann teoremini harmonik dönüşüm özdeşliğinden ilk olarak elde eden de Al'ber'dir.
- Hartman, [12] teklik sonuçlarını sınırı olan manifoldlar için elde etti.
- Benzeri sonuçlar Hamilton [15] tarafından parabolik yöntemler kullanılarak elde edildi.
- Harmonik dönüşümler teorisinde eliptik yöntemler ilk olarak Hildebrant, Kaul ve Widman, [13], [14] tarafından kullanıldı.
- Eğriliği pozitif olmayan kompakt manifoldların esas gruplarına dair Preissmann teoreminin genişletilmesi olarak görülebilecek başka kısıtlamalar Yau, [30], Gromoll ve Wolf, [11], Lawson ve Yau, [31] tarafından bulundu. Bu konuya ilişkin harmonik dönüşüm yaklaşımı [20]'de mevcuttur.
- Son olarak, harmonik dönüşüm teorisinin metrik uzaylara genellemesi Jost [21] tarafından yapıldı. Harmonik dönüşümlerin süper-katılık sonuçlarına uygulamaları [22], [23], [24]'te bulunabir.

- Ayrıca, Siu [28] Kähler manifoldları arasındaki harmonik dönüşümler için Bochner tipinde bir özdeşlik elde etmiştir.
- Sampson [27] Kähler manifoldlarından Riemann manifoldlarına olan harmonik dönüşümler için ayrı bir özdeşlik bulmuştur.
- Harmonik dönüşümler teorisinin en genel sonuçları Jost ve Yau, [25], Mok, Siu ve Yeung, [29] tarafından elde edilmiştir.

2 Riemannian manifoldlarının harmonik dönüşümleri

M ve N Riemannian manifoldları, $f : M \longrightarrow N$ düzgün bir gönderim olsun. Bu durumda df diferensiyeli $T^*M \otimes f^*(TN)$ demetinin bir arakesitidir. Bu demetteki kovaryant türevi ∇ ile gösterecek olursak,

$$\tau(f) := iz\nabla df = 0 \tag{1}$$

eşitliğini sağlayan $f : M \longrightarrow N$ gönderimlerine harmonik denir. Bu eşitlik yerel koordinat sisteminde de yazılabilir. M ve N manifoldlarının boyutlarını sırasıyla m ve n ile gösterelim. $(g_{ij})_{i,j=1,...,m}$ M manifoldunun metrik tensörü, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, $g = \det(g_{ij})$ ve $(h_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,...,n}$ N manifoldunun metrik tensörü ise
$i = 1, ..., n$ için (1) ,

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}f^\gamma) + g^{ij}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}) = 0 \tag{2}$$

eşitliğine denktir. Bu durumda, ana terimi M'nin Laplace-Beltrami operatörü olan doğrusal olmayan, eliptik bir kısmi diferensiyel denklemler sistemi elde edilir. Burada doğrusallığı N'nin geometrisi bozmaktadır.
Herhangi bir f gönderiminin enerjisinin

$$| df |^2 = \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha\beta=1}^{n} g^{ij}(x)h_{\alpha\beta}(f(x))\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}. \tag{3}$$

olmak üzere

$$E(f) := \frac{1}{2}\int_M | df |^2 \, dvol(M), \tag{4}$$

integrali ile tanımlandığını hatırlayalım. M'nin kompakt olması halinde, her düzgün f gönderiminin sonlu enerjisi olacağı için harmonik dönüşümler enerji fonksiyoneli E'nin düzgün kritik noktalarıdır. Örneğin,

- $dim(M) = 1$ ise , N manifoldunun jeodezik eğrileri harmoniktir.
- $N = \mathbb{R}$ ise, harmonik dönüşümler M'de tanımlı harmonik fonksiyonlardır.
- M manifoldu N'nin minimum hacimli bir Riemann alt manifoldu ise, $i : M \longrightarrow N$ kapsama gönderimi harmoniktir.

3 Kähler manifoldlarının harmonik dönüşümleri

$m = dim_{\mathbb{C}} M$ için, M manifoldunun Kähler metriğini yerel koordinatlarda $(g_{i\bar{j}})_{i,j=1,...,m}$ şeklinde gösterelim. Bu durumda, Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta_M = \sum_{i,j=1}^{m} g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial z^{\bar{j}}}.$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla,
$\alpha = 1, .., n$ için (2)

$$\sum_{i,j=1}^{m} g^{i\bar{j}}((\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial z^i \partial z^{\bar{j}}}) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial z^{\bar{j}}}) = 0 \tag{5}$$

şeklinde ifade edilir.
$\alpha = 1, .., n$ ve her $i, j = 1, .., m$ için

$$g^{i\bar{j}}((\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial z^i \partial z^{\bar{j}}}) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial z^{\bar{j}}}) = 0 \tag{6}$$

ifadesini sağlayan $f : M \longrightarrow N$ gönderimlerine pluriharmonik denir. Her pluriharmonik gönderimin harmonik olduğu aşikardır.

N'nin de bir Kähler manifoldu olduğunu varsayarsak ve $n = dim_{\mathbb{C}} N$ ise harmonik dönüşüm denkleminin (5) ile aynı formda olduğu görülür. Bu durumda N'nin koordinatları kompleks koordinatlardır. Benzer şekilde, (6)'da kompleks koordinatlarda yazıldığında aynı şekilde ifade edilmektedir. (6)'dan Kähler manifoldları arasındaki holomorfik gönderimlerin pluriharmonik ve dolayısıyla da harmonik olduğunu sonucunu çıkarırız. Holomorfik gönderimler kompleks yapı ile tarif edildiğinden bu çıkarım bize Kähler manifoldlarının tanımının gereği olan kompleks ve Riemann yapıların uyumluluğunu gösterir.

4 Hermitiyen manifoldların harmonik dönüşümleri

M bir kompleks manifold, $(g_{i\bar{j}})$ bu manifold üzerinde bir Hermitiyen metrik, $(N, h_{\alpha\beta})$ bir Riemann manifoldu olsun. N'nin Christoffel sembollerini $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ ile gösterelim. Bu bölümden itibaren ifadeleri kolaylaştırmak amacıyla Einstein'ın toplama kuralı kullanılmıştır. $f : M \longrightarrow N$ harmonik dönüşümü

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z^{\bar{j}}}(g^{i\bar{j}}\frac{\partial f^\gamma}{\partial z^i}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z^i}(g^{i\bar{j}}\frac{\partial f^\gamma}{\partial z^{\bar{j}}}) + g^{i\bar{j}}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(f(z))\frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial z^{\bar{j}}} = 0, \quad i = 1, ..., n \tag{7}$$

eşitliğini sağlamalıdır.

(7)'nin bir dezavantajı, M Kähler olmadıkça, bir holomorfik gönderimin harmonik olmamasıdır. Bu nedenle,(7) yerine

$$g^{i\bar{j}}(\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial z^i \partial z^{\bar{j}}} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial z^{\bar{j}}}) = 0, \quad i = 1, ..., n \tag{8}$$

denklemini kullanacağız. (7) ve (8) numaralı denklemlerin M manifoldunun Kähler olması durumunda denk oldukları aşikardır.

(7) ile (8) arasındaki fark, konneksiyon Levi-Civita olmadığı durumlarda bir manifold üzerindeki jeodezikleri iki değişik şekilde tanımlamaya benzer. Jeodezikleri metrik olarak tanımlayabilecegimiz gibi (yani, uzunluk veya enerji integralinin kritik noktaları olarak), konneksiyonun kendi kendine paralel olmasıyla da tanımlayabiiriz. Hermitiyen ve Kähler olmayan bir manifoldta, kanonik kompleks konneksiyon metrikle uyumlu olmadığından (7) ile jeodeziklerin metrik olarak tanımlanması birbirine benzerdir. Aynı şekilde, (8) ile jeodeziklerin ikinci şekilde tanımlanması arasında benzerlik kurulabilir. (8)'nin çözümlerine Hermitiyen harmonik diyeceğiz.

5 Afin manifoldların harmonik dönüşümleri

Koordinat dönüşümlerinin afin olduğu koordinat haritalarıyla örtülebilen manifoldlara afin manifold denir. Bu durumda afin manifold bir düz afin konneksiyon taşır. Çalışmanın bu kısmı, TÜBİTAK 2219 Yurtdışı Doktora Sonrası Araştırma Bursu ve Max Planck Institute of Mathematics in the Sciences'ın katkılarıyla J. Jost'la ortak yürütülmüştür.

5.1 Kähler afin yapılar

Eğer M manifoldu

$$g_{ij} dx^i dx^j \tag{9}$$

şeklinde tanımlanan bir iki-tensör taşıyorsa M'ye Kähler afin denilir. F bir konveks fonksiyon olmak üzere, (9) yerel koordinatlarda

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \tag{10}$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla, g bir Riemann metriğidir. Genelde, g'nin Levi-Civita konneksiyonu düz değildir yani M'deki düz afin konneksiyondan farklıdır. Buradaki önemli nokta, g'yi tanımalayan

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j \tag{11}$$

ifadenin afin dönüşümler altında değişmez kalmasıdır. g'den düz afin konneksiyonu aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$$\Gamma^{(0)}_{ijk} = \langle \nabla^{(0)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \rangle \tag{12}$$

$$\Gamma^{(\alpha)}_{ijk} = \Gamma^{(0)}_{ijk} - \frac{\alpha}{2}\partial_i\partial_j\partial_k F \tag{13}$$

(13)'ten,

$$\Gamma^{(0)}_{ijk} = \frac{1}{2}\partial_i\partial_j\partial_k F \tag{14}$$

eşitliğini elde ederiz. Dahası,

$$\Gamma^{(\alpha)}_{ijk} = \frac{1}{2}(1-\alpha)\partial_i\partial_j\partial_k F, \tag{15}$$

eşitliği i ve j için simetrik olduğundan, $\nabla^{(\alpha)}$ konneksiyonunun burulması sıfırdır. $\Gamma^{(\alpha)}_{ijk} + \Gamma^{(-\alpha)}_{ijk} = 2\Gamma^{(0)}_{ijk}$ olduğundan, bütün V, W, Z vektör alanları için $\nabla^{(\alpha)}$ ve $\nabla^{(-\alpha)}$ birbirlerine,

$$Z\langle V, W\rangle = \langle \nabla^{(\alpha)}_Z V, W\rangle + \langle V, \nabla^{(-\alpha)}_Z W\rangle \tag{16}$$

manasında dualdirler. $\Gamma^{(1)}_{ijk} = 0$ özel durumunda, $\nabla^{(1)}$ bir düz yapı tanımlar ve x koordinatları $\nabla^{(1)}$ için afin koordinatlardır.

O halde, $\nabla^{(1)}$ konneksiyonuna dual olan konneksiyon $\nabla^{(-1)}$'dir ve x koordinatlarına göre Christoffel sembolleri

$$\Gamma^{(-1)}_{ijk} = \partial_i\partial_j\partial_k F$$

şeklindedir. Buradan dual afin koodinatları aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\xi_j = \partial_j F, \tag{17}$$

ve

$$g_{ij} = \partial_i \xi_j. \tag{18}$$

Karşılık gelen yerel potansiyel bir Legendre dönüşümü yardımıyla

$$\Phi(\xi) = \max_x (x^i\xi_i - F(x)), \quad F(x) + \Phi(\xi) - x\cdot\xi = 0, \tag{19}$$

ve

$$x^j = \partial^j \Phi(\xi), \quad g^{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial \xi_i} = \partial^i\partial^j\Phi(\xi). \tag{20}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, bir Kähler afin yapıdan bir dual düz yapı, yani, bir g Riemannian metriği ve bu metriğe göre birbirlerine dual olan iki düz konneksiyon ∇ ve ∇^*'ı elde ederiz. Dual düz yapılar ilk olarak informasyon geometrisinin temelini oluşturmak üzere Chensov [7] ve Amari [3, 9] tarafından geliştirildi. Tersine, dual düz yapılar verildiğinde bir yerel potansiyel fonksiyonu, yani bir Kähler afin yapı elde edebiliriz [16], [6].

5.2 Afin harmonik dönüşümler

Kähler afin yapıyı kullanarak bir diferensiyel operatör tanımlayabiliriz.

$$L := g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}, \tag{21}$$

Bu operatör afin olarak değişmezdir.

$$Lf = 0 \tag{22}$$

şartını sağlayan bir $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna afin harmonik denir. Genel olarak N üzererindeki metrik $\gamma_{\alpha\beta}$ olan ve Christoffel sembolleri $\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}$ ile gösterilen bir Riemann manifoldu ise N'nin yerel koordinatlarında

$$g^{ij}(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial f^\delta}{\partial x^j}) = 0 \tag{23}$$

denklemini sağlayan bir $f : M \to N$ gönderimine afin harmonik dönüşüm denir. D ile $T^*M \otimes f^{-1}TN$ demetindeki konneksiyonu gösterirsek, bu denklemi daha değişmez olarak

$$g^{ij}D_i f_j = 0 \tag{24}$$

şeklinde yazabiliriz.

(23) yarı-doğrusal eliptik kısmi diferensiyel denklemler sistemidir ve divergens formunda olmayıp varyasyonel yöntemlerin uygulanması olanaksızdır. Jost ve Yau'nun [17] yöntemi bir $f : M \times [0, \infty) \to N$ fonksiyonu ve $f(x, 0) = g(x)$ başlangıç değeri için karşılık gelen

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial t} = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial f^\delta}{\partial x^j}\right) \tag{25}$$

parabolik denkleminin varlık teoremlerini çalışmayı gerektirir. N manifoldunun eğriliğinin pozitif olmadığı durumlarda çözümün her $0 \leq t < \infty$ için varlığı ve (23)'ün bir çözümüne yakınsadığı gösterilmiştir. Hedef manifoldun eğriliğin pozitif olmaması gerektiğine dair aşağıdaki örneği verebiliriz.

$m, n \in \mathbb{Z}$ için $\mathbb{R}^2$'nin aşağıdaki afin dönüşümlerini gözönüne alalım:

$$(x, y) \to (x + ny + m + \frac{1}{2}n^2, y + n) \tag{26}$$

$\mathbb{R}^2$'nin $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$'nin bu etkisine bölümü bir kompakt afin M manifoldudur, [10]. Dolayısıyla,

$$\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, (x, y) \mapsto x - \frac{1}{2}y^2 \tag{27}$$

gönderimi $(m, n) \to m$ homomorfizmasına göre eşdeğişmezdir yani $\tilde{g}(x + ny + m + \frac{1}{2}n^2, y + n) = \tilde{g}(x, y) + m$ ifadesi sağlanır ve $S^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}$ için

$$g : M \to S^1 \tag{28}$$

gönderimi elde edilir.

$\mathbb{R}^2$ üzerindeki başlangıç değeri $\phi(x, y, 0) = \tilde{g}(x, y)$ olan

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta \phi \tag{29}$$

ısı akısını gözönüne alırsak,

(29)'un çözümünün

$$\phi(x, y, t) = x - \frac{1}{2}y^2 - t \tag{30}$$

olduğunu görürüz. Bu çözüm her $t > 0$ için eşdeğişmezdir ve $t \to \infty$ için çözüm bir harmonik fonksiyona yakınsamamaktadır. Laplace operatörü $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$'nin $\mathbb{R}^2$ üzerindeki etkisi altında değişmez olmadığından, bu örnek bizim incelediğimiz durumla tam olarak aynı olmamakla beraber çözüm eşdeğişmez kaldığından bu sorun önemli değildir. Değişmez metrik aşagıda verilmiştir.

$$g_{ij}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -y \\ -y & y^2 + 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Bu metrik Kähler afin değildir.

References

[1] Al'ber S.I., On n-dimensional problems in the calculus of variation in the large, Sov. Math. Dokl. 5, 700-794, 1964

[2] Al'ber S.I., Spaces of mappings into a manifold with negative curvature, Sov. Math. Dokl. 9, 6-9, 1967

[3] S. I. Amari, H. Nagaoka, Methods of information geometry, Transl. Math. Monogr. 191, AMS & Oxford Univ. Press, 2000

[4] N.Ay, W.Tuschmann, Dually flat manifolds and global information geometry, Open Sys.& Information Dyn.9, 195-200, 2002

[5] S. Bochner Harmonic surfaces in Riemannian metric, Trans. AMS, 47, 147-154, 1940

[6] S.Y.Cheng, S.T.Yau, The real Monge-Ampère equation and affine flat structures, in: S.S.Chern, W.T.Wu (eds.), Differential geometry and differential equations, Proc.Beijing Symp.1980, pp.339-370, 1982

[7] N.N.Chentsov, Statistical decision rules and optimal inferences, AMS, 1982 (Translation of the Russian version, Nauka, Moscow, 1972)

[8] J. Eells, H. Sampson, Harmonic mappings of Rieamannian manifolds, Amer. J. Math, 86, 109-160, 1964

[9] A. Fujiwara, S. I. Amari, Gradient systems in view of information geometry, Phys. D 80, 317-327, 1995

[10] W.Goldman, M.Hirsch, A generalization of Bieberbach's theorem, Invent.math.65, 1-11, 1981

[11] D. Gromoll and J. Wolf, Some relations between the metric structure and the algebraic structure of the fundamental group in manifolds of nonpositive curvature, Bull. AMS., 77, 545-552, 1971

[12] P. Hartman, On homotopic harmonic maps, Can. J. Math., 19, 673-687, 1967

[13] S. Hildebrant, H. Kaul, and K. O. Widman, Harmoning mappings into Riemannian manifolds with nonpositive curvature, Math. Scand., 37, 257-263, 1975

[14] S. Hildebrant, H. Kaul, and K. O. Widman, An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds, Acta MAth., 138, 1-16, 1977

[15] R. Hamilton, Harmonic maps of manifolds with boundary, Springer, LNM 471, 1975

[16] J. Jost, Information geometry, Lecture Notes

[17] J. Jost, S. T. Yau, A nonlinear elliptic system for maps from Hermitian to Riemannian manifolds and rigidity theorems in Hermitian geometry, Acta Math.170, 221-254, 1993

[18] J. Jost, S. T. Yau, Harmonic mappings and Kähler manifols, Math. Ann., 262, 145-166, 1983

[19] J. Jost, S. T. Yau, A nonlinear elliptic system for maps from Hermitian to Riemannian manifolds and rigidity theorems in Hermitian geometry, Acta Math., 170, 221-254, 1993

[20] J. Jost, Non Linear Methods in Riemannian and K ählerian Geometry, Birkhäuser, 1998, 1991.

[21] J. Jost, Nonpositive curvature: Geometric and analytic aspects, Birkhäuser, 1997

[22] J. Jost, Equilibrium maps between metric spaces, Calc. Var., 2, 173-204, 1994

[23] J. Jost, Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of nonpositive curvature, Comment. Math. Helv., 70, 659-673, 1995

[24] J. Jost, Generalized harmonic maps between metric spaces, Geometric analysis and the calculus of variations for S. Hildebrant, 143-174, Intern. Press, Boston, 1996

[25] J. Jost and S. T. Yau, Harmonic maps and superrigidity, Proc. Symp. Pure Math., 54(I), 245-280, 1993

[26] J. Milnor, On fundamental groups of complete affinely flat manifolds, Adv.Math.25, 178-187, 1977

[27] Sampson J., Applications of harmonic maps to Kähler geometry, Contemp. Math. 49, 125-134, 1986

[28] Siu, Y.-T., The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, Ann. Math., 112, 73-111, 1980

[29] N. Mok, Y. T. Siu, S. K. Yeung, Geometric Superrigidity, Inv. Math., 113, 57-84, 1993

[30] S. T. Yau, On the fundamental group of compact manifolds of nonpositive curvature, Ann. Math., 93, 579-585, 1971

[31] H. B. Lawson and S. T. Yau, Compact manifolds of nonpositive curvature, J. Diff. Geom., 7, 211-228, 1972