21. Ulusal Matematik Sempozyumu Bildiriler Kitabı E.1-10

Hemen Hemen Paralel G_2 Yapısına Sahip 7−Boyutlu Riemann Manifoldlar Üzerinde $Spin^c$ Dirac Operatörü

Nülifer Özdemir*

Özet

7-Boyutlu G_2 yapısına sahip bir Riemann manifoldu üzerindeki φ temel 3-formu, sabit bir λ sayısı için $d\varphi = -8\lambda(*\varphi)$ eşitliğini sağlıyorsa (hemen hemen paralel G_2 yapısına sahip manifold) bu manifoldun tanjant demeti üzerinde, torsiyon tensörü tamamen anti-simetrik ve torsiyonu sıfırdan farklı bir tek kovaryant türev vardır. Bu çalışmada torsiyonu sıfırdan farklı bir kovaryant türev kullanılarak, $spin^c$ spinor demeti üzerinde elde edilen kovaryant türevin bazı özellikleri incelenmiş, bu kovaryant türeve karşılık gelen Dirac operatörü açık olarak ifade edilmiş ve self adjointliği incelenmiştir.

1 Giriş

Bu çalışmada 7-boyutlu hemen hemen paralel G_2 yapısına sahip bir M Riemann manifoldunun tanjant demeti üzerindeki metrik uyumlu, torsiyonu sıfırdan farklı bir kovaryant türev kullanılarak $spin^c$ spinor demeti üzerinde ikinci bir kovaryant türev yazılmış ve özellikleri incelenmiştir. Spinor demeti üzerindeki bu kovaryant türev kullanılarak Dirac operatörü ifade edilmiş ve self adjointliği incelenmiştir.

*Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, ESKİŞEHİR, nozdemir@anadolu.edu.tr

7-boyutlu bir Riemann manifoldunun G_2 yapıya sahip olması manifoldun yapı grubunun G_2 Lie grubuna indirgenmesi demektir. Yapı grubunun G_2 Lie grubuna indirgenebilmesi ise manifoldun tanjant demeti üzerinde non-dejenere bir φ 3-formunun varlığına denktir. Bu 3-forma genellikle temel 3-form denir ([4, 2]).

M^7 Riemann manifoldu üzerinde uygun bir $\lambda \neq 0$ sabiti için $d\varphi = -8\lambda(*\varphi)$ eşitliğini sağlayan bir φ 3-formu varsa bu 3-forma M üzerinde hemen hemen paralel bir G_2 yapısı denir. Böyle bir φ 3-formunun varlığı M üzerinde bir *spin* yapının ve uygun bir λ skaleri için "$\forall X \in TM$ için $\nabla_X \psi = \lambda X.\psi$" koşulunu sağlayan adına Killing spinor denilen bir ψ spinorunun olmasına denktir ([1]). Burada $X.\psi$ ile X vektör alanı ile ψ spinorunun Clifford çarpımı gösterilmektedir. Hemen hemen paralel G_2 yapıları Fernandez ve Gray' in sınıflandırmasına göre W_1 sınıfına eşittir ([2]).

G_2 Grubu

Oktonyonların otomorfizm grubu olan G_2 2-katlı vektör çarpımı kullanılarak ta tanımlanabilir. Ayrıca çalışmanın bundan sonrasında da kullanılacak olan 2-katlı vektör çarpımı kavramı şu şekilde tanımlıdır:

Tanım 1 *V, $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $\langle . \, , . \rangle$ da V üzerinde non-dejenere bir iç çarpım olsun. $\forall \; x, y \in V$ için,*

1) $\langle P(x,y), x \rangle = \langle P(x,y), y \rangle = 0$

2) $\langle P(x,y), P(x,y) \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$

koşullarını sağlayan bilineer $P : V \times V \longrightarrow V$ dönüşümüne $2-$katlı bir vektör çarpımı denir.

V, sonlu boyutlu reel bir vektör uzayı ve $\langle . \, , . \rangle$ de V üzerinde non-dejenere bir iç çarpım olsun. V üzerinde tanımlı 2-katlı bir vektör çarpımı varsa vektör uzayının boyutu 3 yada 7 dir([4, 7, 8]).

2-katlı vektör çarpımı kullanılarak V vektör uzayı üzerinde temel 3-form denilen φ 3-formu

$$\varphi(X, Y, Z) := g(P(X, Y), Z)$$

şeklinde tanımlıdır.

$\{e_1, \ldots, e_7\}$ $\mathbb{R}^7$'nin ortonormal bir tabanı olmak üzere, $\mathbb{R}^7$ de verilen taban elemanlarının 2-katlı bir vektör çarpımı aşağıdaki tabloda verilmiştir([2]):

P	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	0	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	0	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	0	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	0	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	0	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	0

$\mathbb{R}^7$'nin taban elemanlarının 2-katlı vektör çarpımı

Oktonyonların otomorfizm grubu olan G_2 grubu kompakt, bağlantılı ve basit bağlantılı bir Lie grubudur ([4, 2]). Bryant tarafından da G_2 nin $GL(7, \mathbb{R})$ grubunun 2-katlı vektör çarpımını koruyan elemanlarından oluşan bir alt grubu olduğu gösterilmiştir ([4]).

Herhangi bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki bir ∇ kovaryant türevinin torsiyonu

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

olmak üzere torsiyon tensörü

$$\widetilde{T}(X, Y, Z) := g(T(X, Y), Z)$$

şeklindedir. Friedrich ve Ivanov [3]'deki çalışmalarında, hemen hemen paralel G_2 yapısına sahip bir M^7 Riemann manifoldu için aşağıdaki teoremi ispatlamışlardı:

Teorem 2 *(M^7, g, φ) hemen hemen paralel G_2 yapısına sahip bir manifold ise*

1. $\nabla\varphi = 0$

2. $\widetilde{T}$ *bir 3-formdur.*

koşullarını sağlayan bir tek ∇ *kovaryant türevi vardır ve* $\widetilde{T} = \frac{1}{6}g(d\varphi, *\varphi)\varphi$ *formundadır.*

M^7 Riemann manifoldu hemen hemen paralel G_2 yapısına sahip olduğundan, her $x \in M$ noktasındaki T_xM tanjant uzayı üzerindeki 2-katlı vektör çarpımı $\Gamma(TM)$ üzerine C^∞ olarak genişletilebilir.

P, M manifoldu üzerindeki 2-katlı vektör çarpımını göstermek üzere $\varphi(X, Y, Z) = g(P(X, Y), Z)$ olduğundan ([2, 4]), ∇^g Levi-Civita kovaryant türevini göstermek üzere hemen hemen paralel G_2 yapısına sahip M^7 manifoldu üzerindeki tek türlü belirli kovaryant türev

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + \frac{1}{12}g(d\varphi, *\varphi)P(X, Y)$$

şeklindedir. M manifoldu G_2 yapısına sahip olduğundan, herhangi bir $U \subset M$ açığı üzerinde $\forall m \in U$ için, $E_i(m)$ ve $E_j(m)$ vektörlerinin 2-katlı vektör çarpımı yukarıdaki tabloyla uyumlu olacak şekilde bir $\{E_1, \ldots, E_7\}$ lokal çatısı seçilebilir. Lokal çatı bu şekilde seçilirse

$$\nabla_{E_i} E_j = \nabla^g_{E_i} E_j + \frac{1}{12}g(d\varphi, *\varphi)P(E_i, E_j)$$

olur. Christoffel sembolleri kullanıldığında

$$\nabla^g_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{7} \Gamma^k_{ij} E_k$$

ve

$$P(E_i, E_j) = E_l$$

olmak üzere

$$\delta^l_{ij} = \begin{cases} 1, & P(E_i, E_j) = E_l \quad ise \\ 0, & P(E_i, E_j) \neq E_l \quad ise \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$P(E_i, E_j) = \sum_{l=1}^{7} \delta^l_{ij} E_l$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{7} \Gamma_{ij}^k E_k + \frac{1}{12} g(d\varphi, *\varphi) \sum_{l=1}^{7} \delta_{ij}^l E_l$$

olur.

$$\xi_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{12} g(d\varphi, *\varphi) \delta_{ij}^k$$

denildiğinde

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{7} \xi_{ij}^k E_k$$

şeklinde ifade edilebilir.

2 Spinor Demeti Üzerindeki Kovaryant Türev

G_2 yapısına sahip bir M^7 Riemann manifold bir spin manifolddur([5]). Her spin manifold bir spin^c manifold olduğundan M^7 üzerinde bir kompleks spinor demeti

$$S = P_{Spin^c(7)} \times_\kappa \mathbb{C}^8$$

inşaa edilebilir. Burada κ, kompleks Clifford cebri $\mathbb{C}l_7$ nin representasyonunun $Spin^c(7)$ ye kısıtlanmışı olan $\kappa : Spin^c(7) \to Aut(\mathbb{C}^8)$ representasyonudur. M^7 manifoldu üzerinde yukarıda belirtilen torsiyonu sıfır olmayan ∇ kovaryant türevi kullanılarak spinor demet üzerindeki kovaryant türev yazılabilir. $\{E_1, ..., E_7\}$, bir U_α açığı üzerinde vektör alanlarının ortonormal çatısı bir önceki bölümde olduğu gibi seçilsin. V, M^7 manifoldu üzerinde bir vektör alanı olmak üzere kompleks spinor demeti üzerindeki kovaryant türev, aşağıdaki şekildedir ([6]):

$$\nabla_V^A \psi = d\psi(V) - \frac{1}{2} \sum_{i<j} (A_\alpha(V))_{ij} \kappa(e_i e_j) \psi + \frac{1}{2} A(V) \psi.$$

Burada A, U_α açığı üzerinde $i\mathbb{R}$-değerli bir 1-form, A_α ise yine aynı açık üzerinde $so(7)$-değerli bir 1-formdur (gauge potansiyel). E_k elemanı dikkate alındığında

$$(A_\alpha(E_k))_{ij} = \xi^i_{kj}$$

olur. Spinor demeti üzerindeki Levi-Civita kovaryant türevinden elde edilen E_k yönündeki kovaryant türev

$$\nabla^{A,g}_{E_k} = d\psi(E_k) - \frac{1}{2}\sum_{i<j}\Gamma^i_{kj}\kappa(e_ie_j)\psi + \frac{1}{2}A(E_k)\psi$$

olmak üzere

$$\nabla^A_{E_k}\psi = \nabla^{A,g}_{E_k}\psi - \frac{1}{24}\sum_{i<j} g(d\varphi, *\varphi)\delta^i_{kj}\kappa(e_ie_j)\psi$$

şeklindedir.

$(,)$ ile S spinor demeti üzerindeki Hermityen iç çarpım gösterilmek üzere, spinor demeti üzerinde tanımlı ∇^A kovaryant türevinin sağladığı özellikler aşağıdaki önermelerde verilmektedir.

Yardmcı Teorem 3 *Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\psi \in \Gamma(S)$ için*

$$\nabla^A_Y(X.\psi) = X.(\nabla^A_Y\psi) + (\nabla_Y X).\psi$$

eşitliği sağlanır.

İspat. E_k vektör alanı için

$$\begin{aligned}
\nabla^A_{E_k}(X.\psi) &= \nabla^{A,g}_{E_k}(X.\psi) - \tfrac{1}{24}\sum_{i<j} g(d\varphi, *\varphi)\delta^i_{kj}\kappa(e_ie_j)(X.\psi) \\
&= X.\left(\nabla^{A,g}_{E_k}\psi\right) + \left(\nabla^g_{E_k}X\right).\psi \\
&\quad -\tfrac{1}{24}\sum_{i<j} g(d\varphi, *\varphi)\delta^i_{kj}\kappa(e_ie_j)(X.\psi),
\end{aligned}$$

$$X.\left(\nabla^{A}_{E_k}\psi\right)+\left(\nabla_{E_k}X\right).\psi =$$

$$X.\left(\nabla^{A,g}_{E_k}\psi\right)+\left(\nabla^{g}_{E_k}X\right).\psi$$

$$-\frac{1}{24}g(d\varphi,*\varphi)\left\{\sum_{i<j}\delta^{i}_{kj}X.\left(\kappa(E_iE_j)\psi\right)-2P(E_k,X).\psi\right\}.$$

Bu eşitliklerden

$$-\frac{1}{24}g(d\varphi,*\varphi)\left\{\sum_{i<j}\delta^{i}_{kj}X.\left(\kappa(E_iE_j)\psi\right)-2P(E_k,X).\psi\right\}$$

$$=-\frac{1}{24}\sum_{i<j}g(d\varphi,*\varphi)\delta^{i}_{kj}\kappa(e_ie_j)(X.\psi)$$

olduğundan

$$\nabla^{A}_{E_k}(X.\psi)=X.(\nabla^{A}_{E_k}\psi)+(\nabla_{E_k}X).\psi$$

eşitliği sağlanır. Kovaryant türevin $\nabla_{fY}\psi = f\nabla_{Y}\psi$ özelliğinden, herhangi bir $Y\in\Gamma(TM)$ içinde eşitliğin sağlandığı açıktır. ■

Yardmcı Teorem 4 *Herhangi $\psi_1,\psi_2\in\Gamma(S)$ spinorları ve herhangi bir X vektör alanı için*

$$X(\psi_1,\psi_2)=(\nabla^{A}_{X}\psi_1,\psi_2)+(\psi_1,\nabla^{A}_{X}\psi_2)$$

koşulu sağlanır.

İspat. İspatın herhangi bir E_k taban elemanı için yapılması yeterlidir.

$$(\nabla^{A}_{E_k}\psi_1,\psi_2)+(\psi_1,\nabla^{A}_{E_k}\psi_2)=$$

$$(\nabla^{A,g}_{E_k}\psi_1,\psi_2)+(\psi_1,\nabla^{A,g}_{E_k}\psi_2)$$

$$-\frac{1}{24}g(d\varphi,*\varphi)\sum_{i<j}\delta^{i}_{kj}\left\{(\kappa(E_iE_j)\psi_1,\psi_2)))+(\psi_1,\kappa(E_iE_j)\psi_2)\right\}$$

eşitliğindeki aşağıdaki ifade

$$(\kappa(E_iE_j)\psi_1,\psi_2))) + (\psi_1,\kappa(E_iE_j)\psi_2) = 2\delta_{ij}(\psi_1,\psi_2)$$

olduğundan ve eşitlikte toplam $i < j$ üzerinden alındığından

$$(\nabla^A_{E_k}\psi_1,\psi_2) + (\psi_1,\nabla^A_{E_k}\psi_2) = (\nabla^{A,g}_{E_k}\psi_1,\psi_2) + (\psi_1,\nabla^{A,g}_{E_k}\psi_2)$$

bulunur.

$$(\nabla^{A,g}_{E_k}\psi_1,\psi_2) + (\psi_1,\nabla^{A,g}_{E_k}\psi_2) = E_k(\psi_1,\psi_2)$$

olduğundan istenen sağlanmış olur. ■

3 Spinor Demeti Üzerinde Dirac Operatörü

Hemen hemen paralel G_2 yapıya sahip bir M^7 Riemann manifoldu üzerindeki *spin*^{c} spinor demeti S ve M^7 manifoldunun tanjant demeti T, kotanjant demeti T^* olmak üzere

$$\mu : \Gamma(T\otimes S) \to \Gamma(S), \mu(V\otimes\psi) := V.\psi$$

Clifford çarpımını belirtmek üzere Dirac operatörü

$$D_A := \mu\circ\nabla^A : \Gamma(S) \to \Gamma(T^*\otimes S) \cong \Gamma(T\otimes S) \to \Gamma(S)$$

şeklinde tanımlıdır. Dirac operatörü M manifoldunun herhangi bir U açığı üzerindeki vektör alanlarının ortonormal bir $\{E_1,...,E_7\}$ çatısına göre yazıldığında aşağıdaki gibidir ([5, 6]):

$$D_A\psi = \sum_{i=1}^{n} E_i.\nabla^A_{E_i}\psi$$

Dirac operatörünün tanımındaki $\nabla^A_{E_i}$ kovaryant türev, M üzerindeki torsiyonu sıfırdan farklı olan kovaryant türev kullanılarak yazıldığında Dirac operatörü aşağıdaki şekli alır:

$$D_A\psi = D^g_A\psi + \frac{1}{8}g(d\varphi,*\varphi)\kappa(\varphi)\psi$$

Burada D_A^g ile Levi-Civitadan kovaryant türevinden elde edilen Dirac operatörü gösterilmektedir.

Dirac operatörünün self-adjointliği ise aşağıdaki önermede incelenmiştir.

Önerme 5 *Herhangi $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma(S)$ elemanları kompakt supporta sahipse*

$$\int_{M^7} (D_A\psi_1, \psi_2) = \int_{M^7} (\psi_1, D_A\psi_2)$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned}
(D_A\psi_1, \psi_2) &= \left(\sum_{k=1}^{7} E_k.\nabla^A_{E_k}\psi_1, \psi_2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{7}\left(E_k.\nabla^A_{E_k}\psi_1, \psi_2\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{7}\left(\nabla^A_{E_k}\psi_1, E_k.\psi_2\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{7}\left\{E_k\left(\psi_1, E_k.\psi_2\right) - \left(\psi_1, E_k.\left(\nabla^A_{E_k}\psi_2\right)\right) - \left(\psi_1, \left(\nabla_{E_k}E_k\right).\psi_2\right)\right\} \\
&= \left(\psi_1, \sum_{k=1}^{7} E_k.\left(\nabla^A_{E_k}\psi_2\right)\right) + \left(\psi_1, \sum_{k=1}^{7}\left(\nabla_{E_k}E_k\right).\psi_2\right) \\
&\quad -\sum_{k=1}^{7} E_k\left(\psi_1, E_k.\psi_2\right)
\end{aligned}$$

Herhangi bir X vektör alanı için $X \rightarrow M^{\psi_1,\psi_2} := (\psi_1, X.\psi_2)$ şeklinde tanımlanan 1-form dikkate alındığında bu 1-formun diverjansı

$$\delta M^{\psi_1,\psi_2} = \left(\psi_1, \sum_{k=1}^{7}\left(\nabla_{E_k}E_k\right).\psi_2\right) - \sum_{k=1}^{7} E_k\left(\psi_1, E_k.\psi_2\right)$$

olur. Böylece

$$(D_A\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, D_A\psi_2) + \delta M^{\psi_1,\psi_2}$$

elde edilir. Diverjans teoreminden

$$\int_{M^7} \delta M^{\psi_1,\psi_2} = 0$$

olduğundan istenen eşitlik sağlanır. ■

KAYNAKLAR

[1] Friedrich, T., Kath, I., Moroianu, A., Semmelmann, U., *On nearly G_2-structures*, Journal of Geometry and Physics, **23**, 1997.

[2] Fernandez, M., Gray, A., *Riemannian Manifolds with Structure Group G_2*, Ann. di Math Pura ed Appl., **32**, 1982.

[3] Friedrich, T., Ivanov, S., *Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory*, Asian Journ. Math., **6**, 2002.

[4] Harvey, F. R., Spinors and Calibrations, Academic Press, 1990.

[5] Lawson, H. B., Michelsohn, M. L., Spin Geometry, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[6] Friedrich, T., *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, 2000.

[7] Brown, R.B., Gray, A., "Vector Cross Products", *Comment. Math. Helv.*, **42**, 222-236, 1967.

[8] Elduque, A., "Vector Cross Products", *Preprint*, 2004.