İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YEREL-OLMAYAN ve ARA-NOKTA KOŞULLARI İLE TEMEL VE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Kamil ORUÇOĞLU[1] ve Ali DİNLER[2]

[1] İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 34469 Maslak, e-posta: koruc@itu.edu.tr
[2] İstanbul Teknik Üniversitesi, Mühendislik Bilimleri Bölümü, 34469 Maslak, e-posta: dinlera@itu.edu.tr

ABSTRACT

In this study, solution of second-order differential equations with nonlocal and intermediate-point conditions is investigated. A new Green's functional notion is given for these problems. Some examples are given by use of this notion. Also, for such problems, numerical solution is investigated.

ÖZET

Bu çalışmada, yerel-olmayan ve ara-nokta koşulları ile verilmiş ikindici mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü incelendi. Böyle bir problem için Green fonksiyoneli kavramı verildi. Bu kavram kullanılarak bazı örnekler verildi. Böyle problemler için sayısal çözüm yolu incelendi.

Anahtar sözcükler: Green fonksiyonel ara nokta koşulu, yerel olmayan koşul, eş problem.
AMS (2000) konu sınıflandırması: 34A30, 34B05, 34B10, 45J05.

1. Giriş

Temel çözümlerin bulunması problemi diferansiyel denklemler teorisinde önemli bir yere sahiptir. İncelenen denklemin değişken katsayılara sahip olması ya da sınır koşullarının yerel olmaması gibi durumlar temel çözümün bulunması sırasında bir takım zorluklar ortaya çıkarır. İntegral koşulu ile ve/veya ara-noktalarda verilen koşullar ile sunulan problemin klasik ya da bilinen yöntemler ile temel çözümünün bulunması mümkün değildir.

Bu çalışmada

$$u''(t) = z_2(t), \quad t \in G = (0,1) \tag{1.1}$$

doğrusal diferansiyel denklemi

$$\int_0^1 g(s)u(s)ds = z_1;\ u(\alpha) = z_0,\ \alpha \in (0,1), \tag{1.2}$$

integral koşulu ve ara-nokta koşulu ile birlikte alındı. Burada sırası ile $z_1, z_0 \in R$ ve z_2(t), g(t) $\in L_p(G)$ keyfi fonksiyonlardır. Burada $L_p(G)$ ile p'inci mertebeden *G* aralığında integre edilebilen fonksiyonlar uzayı ve *R* ile reel sayılar uzayı gösterilmektedir. Böyle bir problemde verilen koşullardan dolayı temel çözüm bulunup problemin integral gösterimi elde edilemez. Bilinen yöntemler [1,2,3] ancak uygun koşulların verilmesi ve denklem katsayılarının yeterince düzgün olması durumunda kullanılabilir. Bilinen yöntemler kısmi integrasyon formülünü kullanarak eş denklem oluşturma ve bu eş denklem yardımı ile çözümün integral gösterimini elde etmeye dayanmaktadır. Elde edilen eş denklem de genelde bir diferansiyel denklem olmaktadır. Ele aldığımız problemde verilen koşullarından bir tanesi integral tipli koşul diğeri de ara-nokta koşuludur. Bu diferansiyel denklem için Green fonksiyonu (temel çözüm) bulunamaz. Bu yüzden S.S. Akhiev [4,5,6,7] tarafından verilmiş olan temel çözüm kavramı kullanılarak çözümün integral gösterilimi elde edilir. Bu yöntem bilinen yöntemlerden farklı olarak yeni bir eş problem kavramını ve çözüm uzayının özelliklerini kullanmaya dayalıdır. Bu eş problem bilinenlerin aksine bir integro-cebirsel denklemler sistemi olarak elde edilir.

Bu çalışmada, ele aldığımız problem ve çözüm yöntemi için bir takım örnekler üzerinde uygulamalar verildi. Verilen doğrusal (1.1) denkleminde z_2(t) fonksiyonu $f(t,u)$ şeklinde doğrusal olmayan bir terimle değiştirilerek temel çözüm kavramı aranmış olsa, o zaman doğrusal olmayan problemin çözümü doğrusal olmayan bir integral denklemin çözümüne indirgenebilir. Bir örnek de bu durum için sunuldu. Ayrıca integral koşulu ve ara-nokta koşulu ile verilen bu problemlerin sayısal olarak nasıl çözülebileceği gösterildi. Daha sonra ise bazı örnekler üzerinde temel çözüm ile elde edilen çözüm ve sayısal çözüm karşılaştırıldı.

Verilen (1.1)-(1.2) problemi

$$\left(V_2 u\right)(t) \equiv u''(t) = -z_2(t),\ t \in G = (0,1) \tag{1.3}$$

$$V_1 u \equiv \int_0^1 g(s)u(s)ds = z_1,\ \mathrm{V}_0 u = u(\alpha) = z_0,\ \alpha \in (0,1), \tag{1.4}$$

şeklinde yazılsın. Bu problem

$$W_p \equiv W_p^{(2)}(G) = \{u \mid \frac{d^i u}{dt^i} \in L_p(G),\ j = 0,1,2\},$$

şeklinde tanımlanan Banach uzayında incelenir. Bu uzayda norm

$$\|u\|_{W_p} = \sum_{j=0}^{2} \left\| \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L_p(G)},$$

şeklinde tanımlanır. $E_p = L_p(G) \times R \times R$ şeklinde bir Banach uzayı göz önüne alınsın. $V = (V_2, V_1, V_0)$ ve $Z(t) = (z_2(t), z_1, z_0)$ olmak üzere $V : W_p \to E_p$ operatörü tanımlanır ise (1.3)-(1.4) problemi operatör formda

$$Vu = Z \tag{1.5}$$

şeklinde yazılabilir. (1.5) problemi homojen olmayan bir problemdir. V operatörü de W_p 'den E_p 'ye sınırlı bir operatördür.

2. Eş Problem ve Green Fonksiyoneli

Operatör formda (1.5) denklemi S. S. Akhiev [4] tarafından verilmiş olan temel çözüm kavramından yararlanarak incelenir. Bu temel çözüm kavramı $V : W_p \to E_p$ operatörünün gerçek $V^* : E_p^* \to W_p^*$ operatörü ile tanımlanır. Eş operatörü bulmak için W_p uzayının yapısal özelliklerinden faydalanılır. Bu uzaya çözüm uzayı adı verilir. Bu uzayda herhangi bir $u \in W_p$ elemanı için $u(0),\ u'(0)$ değerleri ve $u''(t)$ fonksiyonu bağımsız elemanlardır. Yani keyfi $z_2(t) \in L_p(G)$ ve keyfi $z_0,\ z_1$ sayıları verildiğinde bunlar için tek olan öyle $u \in W_p$ elemanı vardır ki $u(0) = z_0,\ u'(0) = z_1$ ve $u''(t) = z_2(t)$ olur. Bu ise W_p çözüm uzayının $W_p = L_p(G) \times R \times R$ şeklinde izomorfik bir açılıma sahip olduğunu gösterir. V^* eş operatörünün açık ifadesini bulmak için $f(f_2(t), f_1, f_0) \in E_q$ şeklinde E_p üzerinde tanımlı bir fonksiyonel ele alınır ve

$$f(Vu) \equiv \int_0^1 f_2(V_2u)(t)dt + f_1(V_1u) + f_0(V_0u), u \in W_p \tag{2.1}$$

oluşturulur. (1.3)-(1.4) problemindeki açık ifadeler (2.1)'e yerleştirilir ve bir takım ara hesaplamalardan sonra

$$\begin{aligned} f(Vu) &\equiv \int_0^1 f_2(t)(V_2u)(t)dt + f_1(V_1u) + f_0(V_0u) \\ &= \int_0^2 (\omega_2 f)u''(\xi)d\xi + (\omega_1 f)u'(0) + (\omega_0 f)u(0) \\ &= (\omega f)(u),\ \forall f \in E_q,\ \forall u \in W_p,\ 1 \le p \le \infty \end{aligned} \tag{2.2}$$

özdeşliği elde edilir. Burada

$$(\omega_2 f) \equiv f_2(\xi) + f_1 B(\xi) + (\alpha - \xi) H(\alpha - \xi) f_0$$
$$(\omega_1 f) \equiv \alpha f_0 + A_1 f_1 \qquad (2.3)$$
$$(\omega_0 f) \equiv f_0 + A_0 f_1$$

dir. Burada

$$A_0 = \int_0^1 g(s)ds,\ A_1 = \int_0^1 sg(s)ds,\ B(\xi) = \int_\xi^1 g(s)(s-\xi)d\xi$$

olarak tanımlanır. W_p uzayında tanımlı olan doğrusal fonksiyonellerin genel formunda $\omega = (\omega_2,\ \omega_1,\ \omega_0)$ operatörünün V operatörünün eş operatörü olduğu anlaşılır [4,6]. Buradan (1.5) probleminin eş denklemi $\varphi = (\varphi_2,\ \varphi_1,\ \varphi_0) \in W^*$ olmak üzere

$$\omega f = \varphi, \qquad (2.4)$$

şeklinde operatör formunda yazılabilir. (2.4) denklemi bir cebirsel denklemlerden oluşan sistemdir. Bu sistem açık şekilde

$$f_2(\xi) + f_1 B(\xi) + (\alpha - \xi) H(\alpha - \xi) f_0 = \varphi_2;$$
$$\alpha f_0 + A_1 f_1 = \varphi_1; \qquad (2.5)$$
$$f_0 + A_0 f_1 = \varphi_0$$

şeklinde yazılabilir. *H(z)* Heavside fonksiyonudur. Bu cebirsel denklem sistemi $\Delta = \alpha A_0 - A_1 \neq 0$ için tek bir çözüme sahiptir. $\Delta = 0$ için tek çözüm yoktur. Dolayısıyla eş sistem çözülebilirlik hakkında her türlü bilgiyi vermektedir. Burada keyfi $\varphi \in W_p^*(G)$ elemanı yerine özel $\theta(t)(u) = u(t),\ u \in W_p$ fonksiyoneli alınır ise (2.4) veya açık şekli olan (2.5) sisteminden

$$f_2(\xi) + f_1 B(\xi) + (\alpha - \xi) H(\alpha - \xi) f_0 = (t - \xi) H(t - \xi)$$
$$\alpha f_0 + A_1 f_1 = t \qquad (2.6)$$
$$f_0 + A_0 f_1 = 1$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. $\Delta \neq 0$ için bu sistem

$$f_0(t) = \frac{tA_0 - A_1}{\Delta},\ f_1 = \frac{\alpha - t}{\Delta}$$
$$f_2(t) = (t - \xi) H(t - \xi) - \frac{\alpha - \xi}{\Delta} B(\xi) - \frac{(\alpha - \xi) H(\alpha - \xi)(tA_0 - A_1)}{\Delta} \qquad (2.7)$$

elde edilir.

Tanım: Eğer keyfi $t \in \overline{G}$ parametre değeri için (2.6) cebirsel sisteminin çözümü olan $f(t) = (f_2(\xi, t), f_1(t), f_0(t)) \in E_q$ elemanına V operatörünün Green fonksiyoneli denir.

Dolayısıyla ele alınan problemin çözümü için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem: Eğer (1.5) problemi en az bir *f(t)* Green fonksiyoneline sahip ise o zaman keyfi bir $u \in W_p$ çözümü

$$u(t) = \int_0^1 f_2(t,\xi) z_2(\xi) d\xi + f_1(t) z_1 + f_0(t) z_0 \tag{2.8}$$

şeklinde gösterilebilir. Üstelik $Vu = 0$ sadece sıfır çözüme sahiptir.

İspat: Yukarıdaki (2.2) özdeşliğinde $u \in W_p$ fonksiyonu (1.5) denkleminin çözümü gibi $f \in E_q$ elemanı da (2.6)'nın çözümü gibi alınırsa $f(t)(z) = \Theta(t)(u)$ veya $u(t) = \int_0^1 f_2(t,\xi) z_2(\xi) d\xi + f_1(t) z_1 + f_0(t) z_0$ elde edilir. Açık olarak yazılır ise

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 (t-\xi) z_2(\xi) d\xi - f_0(t) \int_0^\infty (\alpha - \xi) z_2(\xi) d\xi \\ &\quad - f_1(t) \int_0^1 B(\xi) z_2(\xi) d\xi + z_0 f_0(t) + z_1 f_1(t) \end{aligned} \tag{2.9}$$

elde edilir. (2.9)'un çözüm olduğu (1.3)-(1.4)'de yerine yerleştirilerek gösterilebilir.

3. Uygulamalar

Bazı basit örnekler üzerinde duralım.

Örnek 1:

$u'' = -t^2,\ t \in (0,1)$

$\int_0^1 u(t) dt = 1$

$u(1/3) = -1$

problemini göz önüne alalım. Bu problemde $\Delta = -1/6 \neq 0$ olduğundan tek çözüm vardır.

Örnek 2:

$u'' = -\sin(t),\ t \in (0,1)$

$\int_0^1 u(t) dt = 1$

$u(1/2) = -1$

problemini göz önüne alalım. Bu problemde $\Delta = 0$ olduğundan tek çözüm yoktur. Ancak genelleştirilmiş genel çözüm vardır, [4,6].

Örnek 3:

$u'' + u^3 = t,\ t \in (0,1)$

$\int_0^1 u(t) dt = 3$

$\int_0^1 t u(t) dt = 2$

problemini göz önüne alalım. $z_2(t)=t-u^3$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\Delta=-1/12$ olduğundan eş denklem çözülebilir ve çözüm bir doğrusal olmayan integral denklemin çözümüne indirgenir.

4. Sayısal Yaklaşım

Yerel-olmayan ve ara-nokta koşulları ile sunulan doğrusal diferansiyel denklemler sonlu farklar yöntemi ile ayrıklaştırılarak ve böylece diferansiyel denklem cebrik bir denklem sistemine dönüştürülerek çözülür. Bu durumda ara-nokta koşulunun dikkatli ele alınması gerekir. İntegral koşulu olmadan sonlu farklar ile elde edilen cebrik sistemde bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazladır. Bu sebepten integral koşulu sayısal integrasyon yöntemlerinden biriyle ayrıklaştırılarak cebrik sisteme dahil edilir.

Şimdi Bölüm 3'de verilen Örnek 1 problemi üzerinde duralım. Örnek 1'de u'' yerine merkezi-farklar formülü yazılırsa ve sınırlar dahil *N+1* noktada ayrıklaştırma yapılırsa

$$u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}=-(\Delta t)^2 t_i^{\,2},\ i=1,\ldots,N-1$$

elde edilir. Burada u_i, $u(t_i)$'ye karşılık gelmektedir. Açık olarak yazarsak

$$\begin{array}{ll} i=1 \text{ için} & u_0-2u_1+u_2=-(\Delta t)^2 t_1^{\,2} \\ i=2 \text{ için} & u_1-2u_2+u_3=-(\Delta t)^2 t_2^{\,2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ i=N-1 \text{ için} & u_{N-2}-2u_{N-1}+u_N=-(\Delta t)^2 t_{N-1}^{\,2} \end{array} \tag{4.1}$$

olur. Burada $\Delta t=1/N$'dir ve bilinmeyenler u_0 ve u_N sırasıyla sol ve sağ sınır değerlerine karşılık gelir.

Cebrik denklem sistemi (4.1) matris formunda yazılırsa

$$\mathbf{A_{N\text{-}1,N+1}u=b} \tag{4.2}$$

doğrusal matris sistemi oluşur. Burada $\mathbf{A_{N\text{-}1,N+1}}$ $N-1\times N+1$ 'lik katsayı matrisi, $\mathbf{u}$ bilinmeyenler vektörü ve $\mathbf{b}$ sağ taraf vektörüdür. Bu doğrusal sistemi açıkça yazarsak

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A_{N\text{-}1,N+1}}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -(\Delta t)^2 t_1^{\,2} \\ -(\Delta t)^2 t_2^{\,2} \\ \vdots \\ -(\Delta t)^2 t_{N-1}^{\,2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

olur. Burada $\mathbf{A}_{\mathbf{N-1,N+1}}$ katsayı matrisi $N-1\times N+1$ ‘lik bir dikdörtgen matristir ve bilinmeyen sayısı satır sayısından fazladır.

Örnek 1’de verilen $\int_0^1 u(t)dt = 1$ integral koşulunu (4.2) doğrusal sistemine dahil etmek için sayısal integrasyon yöntemlerinden biriyle ayrıklaştırırız. Burada basitçe kompozit yamuk formülü $\Delta t = 1/N$ için uygulanırsa

$$\frac{\Delta t}{2}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & 2 & 1\end{pmatrix}\mathbf{u} = 1 \tag{4.3}$$

olur. Burada $\mathbf{u}$ bilinmeyenler vektörüdür. (4.3) ifadesini (4.2) matris sistemiyle beraber ele alırsak, (4.2) sistemine ekstra bir satır eklemiş oluruz ve yeni sistemimiz açık şekilde şöyle olur:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ \frac{\Delta t}{2} & \Delta t & \Delta t & \cdots & \Delta t & \frac{\Delta t}{2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A_{N,N+1}}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -(\Delta t)^2 t_1^{\,2} \\ -(\Delta t)^2 t_2^{\,2} \\ \vdots \\ -(\Delta t)^2 t_{N-1}^{\,2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \tag{4.4}$$

Şimdi, Örnek 1’de verilen $u(1/3) = -1$ ara-nokta koşulunu yukarıdaki doğrusal sisteme uygulayalım. $u(1/3) = u(t_k) = u_k = -1$ ve k bilinsin. Bu durumda u_k bilindiğinden ve u’lar sıfırdan başlayarak indislendiğinden, u_k'ya karşılık $\mathbf{A}_{\mathbf{N,N+1}}$ matrisinin (k+1)’inici sütunu gelir ve bu sütun iptal edilmelidir. Bunun için $\mathbf{A}$ matrisi, düzeltici matris

$$\mathbf{D}_{\mathbf{N+1,N}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (k+1)'inci\ satır \\ \\ \\ \end{matrix}$$

ile çarpılır. Bu matris, (k+1)’inci satırı sıfırlardan oluşan ve bu satır dışındaki köşegen üzerindeki elemanları 1, diğer elemanları sıfır olan $N+1\times N$ ’lik bir dikdörtgen matristir.

Ara-nokta koşulu, sağ taraf vektörü $\mathbf{b}$ ’yi değiştirir. $\mathbf{e}_{\mathbf{k+1}}$ $N+1\times N+1$ ’lik birim matrisin (k+1)’inci sütunu olsun. Bu durumda yeni sağ taraf vektörü

$$\mathbf{b}_{\mathbf{yeni}} = \mathbf{b} - u_k \mathbf{A}\mathbf{e}_{\mathbf{k+1}}$$

olur. Burada u_k bilinen ara-nokta değeridir. Böylece düzeltici matris ve yeni sağ taraf vektörünü kullanarak (4.4) sistemi

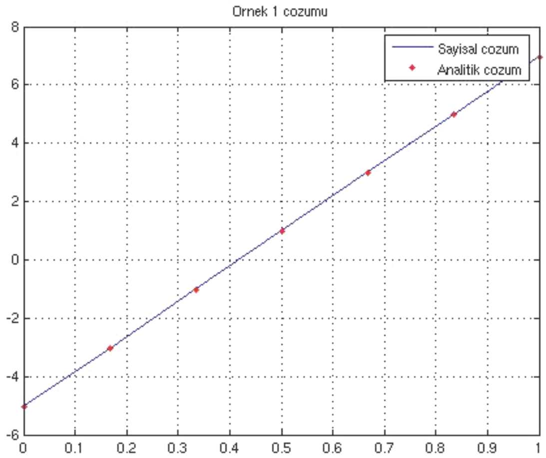
$$(\mathbf{AD})_{N,N}\,\mathbf{u}_{\textbf{çözüm}} = \mathbf{b} - u_k \mathbf{A}\mathbf{e}_{\mathbf{k}+1} \tag{4.5}$$

şeklinde $N \times N$ 'lik bir sisteme dönüştürülür. Böylece çözüm

$$\mathbf{u}_{\textbf{çözüm}} = (\mathbf{AD})^{-1}(\mathbf{b} - u_k \mathbf{A}\mathbf{e}_{\mathbf{k}+1})$$

olarak bulunur.

Aşağıdaki Şekil 1'de temel ve sayısal çözüm karşılaştırıldı.



Şekil 1. Örnek 1'in çözümü

Örnek 1, integral koşulu yerine iki ara-nokta koşulu ile verilmiş olabilirdi. Bu durumda düzeltici matris $\mathbf{D}$ benzer şekilde $N+1 \times N-1$ 'lik bir matris olur. Ancak bu kez sağ taraf vektöründen yine benzer şekilde iki defa ara-nokta vektörü çıkartılır ve çözüm sistemi elde edilir.

5. Sonuç

Bu çalışmada ikinci mertebeden adi türevli diferansiyel denklemlerin yerel-olmayan ve ara-nokta koşulları ile çözümleri incelendi. Böyle bir problem için yeni bir Green fonksiyoneli kavramı verildi. Böylece bu şekilde sunulan denklemlerin temel çözümlerinin nasıl bulunacağı gösterildi. Doğrusal problemlerin sayısal olarak nasıl çözüleceği gösterildi ve bir örnek üzerinde temel ve sayısal çözümler karşılaştırıldı.

Kaynaklar

[1] Hörmander, L., Linear Partial Differential Operator, Springer-Verlag, New York, (1976)
[2] Halanay, A., Differential Equations, Academic Press, New York, (1966)

[3] Stakgold, I., Green's Functions and Boundary Value Problems, Wiley Interscience, New York, (1979)
[4] Akhiev, S. S., Green and Generalized Green's Functionals of Local and Nonlocal Problems for Ordinary Integro-differential Equations, Acta Applicandae Mathematicae, 95, 73-93, (2007)
[5] Akhiev, S. S., Representations of the Solutions of Some Linear Operators, Soviet Math. Dokl., 21(2), 555-558 (1980)
[6] Akhiev, S. S., Oruçoğlu, K., Fundamental Solutions of Some Linear Operator Equations and Applications, Acta Applicandae Mathematicae, 71, 1-30 (2002)
[7] Akhiev, S. S., A New Fundamental Solution Concept and Application to Some Local and Nonlocal Problems, Bul. Tech. Univ. Istanbul, 47(3), 93-99 (1994)