21. Ulusal Matematik Sempozyumu Bildiriler Kitabı C.1-14

MİNKOWSKİ UZAYZAMAN GEOMETRİSİNDE NOKTALARIN ÜRETEÇ İNVARYANTLARI SİSTEMİ VE YÖRÜNGELERİ

İdris ÖREN

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 61080, Trabzon

oren@ktu.edu.tr

Özet

M, Minkowski uzayzamanı olmak üzere, M'de keyfi m-tane nokta için O(3,1) pseudo-ortogonal ve SO(3,1) özel pseudo-ortogonal grubunun invaryant polinomlar halkasının üreteç invaryantlar sistemi bulundu. Bu sistem bulunurken, polarizasyon operatörü, Capelli denklikleri ve invaryant teorisinin yöntemleri kullanıldı.Ayrıca O(3,1) grubunun yörünge problemi çözüldü.

Anahtar Sözcükler : Uzayzaman, invaryant, pseudo-ortogonal, grup, yörünge.
MSC(2000) : 13A50; 15A63; 51M10; 83A05

1. Giriş

Minkowski Uzayzaman geometrisinin doğum yılı 1905 olarak alınabilir. Hermann Minkowski(1864-1909) Öklid geometrisinden farklı olarak, yeni bir metrik tanımlayarak, adına "Minkowski Uzayzaman Geometri" denilecek olan bu geometrik yapıyı oluşturmuştur. Bu yapının Öklid geometrisinden farkı, uzaysal boyuta zaman boyutunun eklenmesi ile uzay-zamanın kaynaşık bir yapı olarak ele alınmasıdır. Böylece dört boyutlu Minkowski Uzayzaman geometrisi ortaya çıkmıştır.

1872'de F.Klein "Erlanger Programı" olarak bilinen konuşmasında geometrilerin grup etkisi altında incelenebileceğini ifade etmiştir. Bu bağlamda Öklid geometrisi, Öklid grubu; Afin geometrisi, Afin grubu altında; nokta, eğri ve yüzeylerin ortogonal ve afin dönüşümler altında korunan özeliklerinin-invaryantlarının- araştırılabileceğini ve önemini belirtmiştir.

Bu durum F.Klein'in ifade ettiği anlamda, Minkowski uzayzaman geometrisini ortaya çıkaran grup etkisi altında nokta, eğri ve yüzeylerin invaryantlarını bulma problemi ortaya çıkmıştır. Diğer taraftan bu geometri için matematiksel ve fiziksel yapılara ait çalışmalar yapılmıştır.

Bu bildiride $O(3,1)$ olarak incelediğimiz ortogonal grup, Minkowski Uzayzaman Geometrisini etkileyen grup anlamında alınmıştır. Bu grup G.L. Naber [16] kitabında Genel Lorentz Grubu(L_{GH}) olarak adlandırılmıştır.

İnvaryantlar teorisi ile ilgili çalışmalara ise 1850-1870 yılları arasında başlanmıştır. İnvaryantlar teorisinde G bir grup olmak üzere $\Re\left[x_1,...,x_m\right]^G$ nin üreteçleri, bu üreteçler arasındaki bağıntılar ve denklik problemi üzerinde durulmuştur.

1850'den 1960'a kadar $\Re\left[x_1,...,x_m\right]^G$ halkasının cebirsel özelikleri incelenmiştir. 1890 yılında Hilbert, invaryantlar teorisi ile ilgili temel çalışmalar yapmıştır.

İnvaryantlara ait bazı çalışmalar J.A.Dieudonne [8], D.Hilbert [12], D.Khadjiev [13], T.A.Springer [20], H.Weyl [22] eserlerinde yer almaktadır.

1946 yılında H.Weyl [22,syf.66], kitabında E.Study [21]'in 1897 yılında yaptığı çalışmalar yardımıyla $O(n)$ grubu ve $SO(n)$ altgrubuna ait noktaların üreteçler problemini incelemiş ve Lorentz grubuna ait problemin çözümünü açık bırakmıştır.

1988 yılında D.Khadjiev [13] kitabında ve R.Aripov'un makalelerinde Öklid grubu için noktaların üreteçleri yardımıyla denklik problemi ve yörünge problemini incelemiştir.

1999 yılında R.Höfer [11], Gram matrisi yardımıyla Minkowski uzayında m tane noktanın yörüngelerini incelemiştir.

2001 yılında F.P.Washek [16], Lorentz grubundaki dönüşümlerin özelikleri, işaret fonksiyonu dilinde incelenmiştir.

2004 yılında İ.Ören [17], iki boyutlu Minkowski uzayzamanında, $O(1,1)$, $SO(1,1)$ ve L-Lorentz grubu için noktaların üreteçlerini ve üreteçleri arasındaki ilişkileri incelemiştir.

2003 ve 2004 yıllarında W.Benz [2,3], iç çarpım dilinde uzaklığı koruyan Lorentz dönüşümleri ve metrik doğruları incelemiştir.

2. Önbilgiler

Tanım 1. V, $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayında bilineer, simetrik ve bozulmamış özeliklerine sahip $g : V \times V \to \Re$ dönüşümüne iç çarpım denir ve $g(u,v) = \langle u,v \rangle$ ile gösterilir.

Teorem 1. V, $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı, $g : V \times V \to \Re$ genelleştirilmiş iç çarpım olsun.Bu takdirde, V'de $\langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$, i=1,2,…,$n$ ve $\langle e_i, e_j \rangle = 0$,$i \neq j$, i,j=1,2,…,n olan $\{e_i\}$ i=1,2,…,n şeklinde bir taban vardır.

İspat: : [16,p.8] ♦

Tanım 2. V, $n \geq 1$ boyutlu reel vektör uzayı ve $g : V \times V \to \Re$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. $g(e_i, e_i) = \langle e_i, e_i \rangle = -1$ olan g-genelleştirilmiş iç çarpımın keyfi ortonormal tabanındaki e_i'lerin sayısına g'nin indeksi denir. [16,p.9]

Tanım 3. M, 4-boyutlu reel vektör uzayında bilineer, simetrik, bozulmamış ve indeksi 1 olan $g : M \times M \to \Re$ ile tanımlı uzaya Minkowski uzayzamanı denir. [16,p.9]

$g : M \times M \to \mathbb{R}$, $g(v,w) = v_1.w_1 + v_2.w_2 + v_3.w_3 - v_4.w_4$ şeklindeki genelleştirilmiş iç çarpıma Lorentz iç çarpımı adı verilir.

Not . Burada $M = \Re^{3+1}$ olarak 4-boyutlu reel uzay anlamında olup $3+1$'in "1" kısmı indeksi ifade etmektedir.

Tanım 4. $g : M \times M \to \Re$ Lorentz iç çarpımı olmak üzere,

(i) $0 \neq v \in M$ için $g(v,v) = \langle v,v \rangle = 0$ ise v-vektörüne ışık vektör denir.

(ii) $v \in M$ için $g(v,v) = \langle v,v \rangle < 0$ ise v-vektörüne zamansal vektör denir.

(iii) $v \in M$ için $g(v,v) = \langle v,v \rangle > 0$ ise v-vektörüne uzaysal vektör denir.

3. Keyfi m tane Noktanın İnvaryant Polinomlar Halkasının Üreteç İnvaryantları Sistemi

$x_1,...,x_m$ noktaları(vektörleri) M'nin elemanları olmak üzere, $p(x_1,...,x_m)$ ile $x_1,...,x_m$'lerin polinomunu tanımlayalım ve bu polinomu kısaca $p(x)$ ile gösterelim.

$x_1,...,x_m$'lerin tüm polinomlar kümesini $\Re[x_1,...,x_m]$ ile tanımlayalım ve bunu kısaca $\Re[x]$ ile gösterelim.

Önerme 1 : $\Re[x]$, bir $\Re$-cebirdir.

İspat: [17] ♦

$O(3,1)=\{F: M \to M : \langle Fx, Fy\rangle = \langle x, y\rangle\}$ ile Lorentz iç çarpımını koruyan tüm pseudo-ortogonal dönüşümlerin grubunu gösterelim. Benzer şekilde Lorentz iç çarpımını koruyan tüm özel pseudo-ortogonal dönüşümlerin grubunu ise $SO(3,1)$ ile gösterelim.

G ile $O(3,1)$'in bir altgrubunu gösterelim.

Tanım 5: G bir grup ve $p(x)$ bir polinom olmak üzere, keyfi $g \in G$ için $p(gx) = p(x)$ ise $p(x)$ polinomuna G-invaryant polinom denir.

Tüm G-invaryant polinomlar kümesini $\Re[x_1,...,x_m]^G$ ile tanımlayalım ve bunu kısaca $\Re[x]^G$ ile gösterelim.

Önerme 2: $\Re[x]^G$, bir $\Re$-cebirdir.

İspat: [17] ♦

Tanım 6: $p(x) \in \Re[x]^{O(3,1)}$ olmak üzere, $\forall g \in O(3,1)$ için $p(gx) = \lambda(g)p(x)$ olacak şekilde bir $\lambda(g)$ fonksiyonu mevcut ise $p(x)$ polinomuna $O(3,1)$-nispi invaryant polinom denir.

Tanım 7 : Yukarıdaki $\lambda(g)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

Ağırlık fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir: $\forall g$, g_1, $g_2 \in O(3,1)$ için;

1) $\lambda(g_1 g_2) = \lambda(g_1)\lambda(g_2)$

2) $\lambda(g) = \pm 1$'dir.

Tanım 8: $p(x) \in \Re[x]^{O(3,1)}$ polinomu $O(3,1)$-nispi invaryant polinom olmak üzere, $\forall g \in O(3,1)$ için $\lambda(g) = 1$ ise $p(x)$'e çift invaryant polinom denir.

Tanım 9: $p(x) \in \Re[x]^{O(3,1)}$ polinomu $O(3,1)$-nisi invaryant polinom olmak üzere, $\forall g \in SO(3,1)$ için $\lambda(g) = 1$ ve $g \in O(3,1)$ için $\lambda(g) = -1$ ise $p(x)$'e tek invaryant polinom denir.

Önerme 3 : $p(x)$ polinomu, $SO(3,1)$-*invaryant* polinom olsun. Bu takdirde, $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$ şeklinde $p_1(x)$ çift ve $p_2(x)$ tek $SO(3,1)$-*invaryant* polinomların toplamı şeklinde tek türlü yazılabilir.

İspat: $f(x)=\left(x^{(1)},\, x^{(2)},\, ...,\, x^{(m)}\right)$, keyfi $SO(3,1)$ - *invaryant* polinom olsun.

$h=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $h\in O(3,1)$ alalım. Burada $\det h=-1$ ve $h^{-1}=h$'dir. Bu takdirde, $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(hx)\right)$çift polinom,$\psi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)-f(hx)\right)$ tek polinomdur. Gerçekten; $g\in O(3,1)$ ve $\det g=-1$ için, $g=g_1h=hg_2$

olacak şekilde $g_1,\, g_2\in SO(3,1)$ mevcuttur ve $g_1=gh^{-1}$, $g_2=h^{-1}g$ 'dir. Buradan;

$g\in SO(3,1)$ ise,$\varphi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(gx)+f(hgx)\right)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(hgh^{-1}hx\right)$'dır.

Burada; $hgh^{-1}\in SO(3,1)$ ve f , $SO(3,1)$ - *invaryant* olduğundan,

$\varphi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(hx)\right)=\varphi(x)$ olur.

$g\in O(3,1)$ ve $\det g=-1$ ise,$\varphi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(gx)+f(hgx)\right)$'dir.

Burada; $g=g_1h$ olacak şekilde $g_1\in SO(3,1)$ mevcuttur.

$\varphi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(g_1hx)+f(hgx)\right)$ yazarız. Burada f 'nin $SO(3,1)$ - *invaryant* ve $hg\in SO(3,1)$ olduğu kullanılarak,

$\varphi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(hx)+f(x)\right)=\varphi(x)$ elde edilir. Dolayısıyla $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(hx)\right)$, $O(3,1)$ - *invaryant* 'tır. Yani çifttir.

Şimdi $\psi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)-f(hx)\right)$ 'in tek invaryant olduğunu gösterelim: Bunun için önce bunun $SO(3,1)$ - *invaryant* olduğunu gösterelim.

$g\in SO(3,1)$ ise, $\psi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(gx)-f(hgx)\right)=\frac{1}{2}\left(f(x)-f(hgh^{-1}x)\right)$ 'dir.

$hgh^{-1}\in SO(3,1)$ ve f , $SO(3,1)$ - *invaryant* olduğundan, $\psi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(x)-f(hx)\right)=\psi(x)$ elde edilir. $g\in O(3,1)$ ve $\det g=-1$ ise,

$\psi(gx)=\frac{1}{2}\left(f(gx)-f(hgx)\right)=\frac{1}{2}\left(f(g_1hx)-f(hgx)\right)$

yazarız. Burada $hg \in SO(3,1)$ ve f 'nin $SO(3,1)$ - *invaryant* olduğu kullanılarak,

$\psi(gx) = \frac{1}{2}\left(f(hx) - f(x)\right) = -\psi(x)$ elde edilir. Dolayısıyla $\psi(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(hx)\right)$ tek invaryanttır. ♦

Teorem 2:

i) Keyfi çift invaryant polinom, $\langle x_i, x_j \rangle, i, j = 1,2,...,m$ 'lerin polinomu olarak ifade edilebilir.

ii) Keyfi tek invaryant polinom , $\varphi(x_1, x_2, ..., x_m)$ çift invaryant polinom olmak üzere $\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\right]\varphi(x_1, x_2, ..., x_m), i_1 < i_2 < ... < i_4;\ i_1, ..., i_4 = 1, ..., m$ 'lerin polinomu şeklinde ifade edilebilir.

İspat : $T_{3+1}{}^{m}$ ile (3+1)-boyutlu uzayda m-tane vektöre bağlı önermeyi gösterelim.

$m > 4$ durumunda Capelli denkliklerinin 1. kısmı kullanılarak, teorem, $T_{3+1}{}^{m} \to T_{3+1}{}^{4}$ durumuna indirilir [22].

Bu taktirde $T_{3+1}{}^{4}$ durumunu inceleyelim.

$m = 4$ durumunda Capelli denkliklerinin 2.kısmı kullanılarak, teorem, $T_{3+1}{}^{3}$ durumunun incelenmesine indirilir[22].

Capelli denkliğinin $m = 4$ olan durumunu f 'ye kullanalım:

$$f = \frac{1}{\rho}\sum P.f^{*} + \left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\right].\Omega f \text{ 'dir.} \tag{1}$$

f - çift olsun. S_r 'deki sıraya göre $P.f$ polinomu f 'den küçüktür ve keyfi $P.f^{*}$ polinomu çifttir. ($P.f^{*}$ 'ler $D_{\alpha^{(i)}\beta^{(i)}}...D_{\alpha^{(1)}\beta^{(1)}}f^{*}$ şeklindedir.)

$\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\right].\Omega f$ terimini inceleyelim:

Ωf 'nin derecesi $r - 4$ olduğundan Ωf için T_{3+1}^{4} doğrudur.

f , çift ise, Ωf tektir. Ωf için T_{3+1}^{4} doğru olduğundan, $\Omega f = \left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\right].\varphi$ şeklinde ifade edilebilir. Burada φ , çifttir. Dolayısıyla,

$$\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\right].\Omega f = \left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\right].\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}\right].\varphi = \begin{vmatrix} \langle x_{i_1}, x_{i_1} \rangle & \cdots & \langle x_{i_1}, x_{i_4} \rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_{i_4}, x_{i_1} \rangle & \cdots & \langle x_{i_4}, x_{i_4} \rangle \end{vmatrix} .\varphi$$

şeklinde yazılabilir. Burada φ, çift ve S_r'deki sırası f'den küçük (derecesi küçük) olduğundan φ polinomu $\langle x_i, x_j \rangle$'ler cinsinden ifade ediliyor. Bundan dolayı f'nin çift olduğu durumda f için T_{3+1}^4 doğrudur.

Şimdi f, tek olsun. Bu takdirde (1) eşitliğindeki $P.f^*$'ler de tektir. $P.f^*$'lerin S_r'deki sırası f'den küçüktür. Buna göre $P.f^*$'ler için T_{3+1}^4 doğrudur.

Şimdi $\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4} \right].\Omega f$ terimini inceleyelim:

f, tek olduğundan Ωf çifttir. Dolayısıyla f polinomu $\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4} \right].\Omega f$ polinomlarının toplamı şeklindedir. Burada φ, çifttir. Sonuçta f için T_{3+1}^4 doğrudur.

Şimdi ${T_{3+1}}^3$ durumunu inceleyelim. Burada ispat iki kısma ayrılır:

1) Çift invaryant polinomların incelenmesi. (Bunu ${T_{3+1}}^{3C}$ ile göstereceğiz.)

2) Tek invaryant polinomların incelenmesi. (Bunu ${T_{3+1}}^{3T}$ ile göstereceğiz.)

Şimdi ;

1) ${T_{3+1}}^{3C}$ kısmını ispatlayalım.Bunun anlamı (3+1)-boyutlu uzayda 3 tane vektöre bağlı çift invaryant polinomlara ait önermedir.Burada,

$f(x_1, x_2, x_3)$, $O(3,1)$-çift invaryant polinom olsun. Burada $x_1, x_2, x_3 \in \Re^{3+1}$ lineer bağımsız vektörleri $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}), x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}), x_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34})$ ile gösterelim.

Bunların Gram matrisini $G(x_1, x_2, x_3) = \left(\langle x_i, x_j \rangle \right)_{i,j=1,2,3}$ ve Gram determiantını $\det G(x_1, x_2, x_3)$ ile gösterelim.

$\det G(x_1, x_2, x_3) \neq 0$ olsun. Bu takdirde $F \in O(3,1)$ ile $Fx_i = y_i = (y_{i1}, y_{i2}, 0, y_{i3}), i = 1,2,3$ şekline getirilebilir. Böylece $\det G(y_1, y_2, y_3) \neq 0$'dır. Bu takdirde,

$f(y_1, y_2, y_3) = \varphi\left(\langle y_i, y_j \rangle \right), i \leq j = 1,2,3$ şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca burada $\{y_i\}, i = 1,2,3$'ler $\Re^{2+1}$'in elemanlarıdır. Diğer taraftan,

$\varphi\left(\langle y_i, y_j \rangle \right) = \varphi\left(\langle Fx_i, Fx_j \rangle \right) \overset{F \in O(3,1)}{=} \varphi\left(\langle x_i, x_j \rangle \right)$'dir. O zaman $f(x_1, x_2, x_3) = \varphi\left(\langle x_i, x_j \rangle \right)$ şeklinde ifade edilebilir.

Varsayalım $\det G(x_1, x_2, x_3) = 0$ olsun. Bu takdirde, H.Weyl [22,syf.4,Lemma1.1.A]'dan cebirsel eşitsizliklerin önemli olmadığı prensibine göre, bir polinom kökleri dışında sıfır ise her yerde sıfırdır.Yani, çözüm sağlanır.

Diğer taraftan, $f\left(y_1,y_2,y_3\right)$ polinomu, $\Re^{2+1}$'de $\left\{y_i\right\},i=1,2,3$'lerin $O(2,1)$-*invaryant* polinomudur.Yani üç tane vektörün çift polinomudur. Böylece durum $T_{3+1}^{3C} \to T_{2+1}^{3C}$'ü incelemeye iner.

Burada $m=3$ durumunda Capelli denkliklerinin 2. kısmı kullanılarak, teorem $T_{2+1}^{3C} \to T_{2+1}^{2C}$ durumuna indirilir [22].

Böylece ispatımız T_{2+1}^{2C} durumunu incelemeye iner. Ancak yukarıdaki kısımdaki gibi ispat yapılırsa $T_{2+1}^{2C} \to T_{1+1}^{2C}$ durumuna indirilir. T_{1+1}^{2C} durumu [17]'de ispatlanmıştır.

2) T_{3+1}^{3T} kısmını ispatlayalım.

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $O\left(3,1\right)$-*tek invaryant* polinom olsun. Burada $x_1,x_2,x_3 \in M$ lineer bağımsız vektörleri $x_1=\left(x_{11},x_{12},x_{13},x_{14}\right),x_2=\left(x_{21},x_{22},x_{23},x_{24}\right),x_3=\left(x_{31},x_{32},x_{33},x_{34}\right)$ ile gösterelim. Bu takdirde $F\in O(3,1)$ ile $Fx_i=y_i=\left(y_{i1},y_{i2},0,y_{i3}\right),i=1,2,3$ şekline getirilebilir.

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $O\left(3,1\right)$-*tek invaryant* polinom ve $F\in O(3,1)$ olduğundan

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=f\left(F\left(x_1\right),F\left(x_2\right),F\left(x_3\right)\right)=\det F.f\left(y_1,y_2,y_3\right)$ olur. $F\in O(3,1)$ olduğundan F^{-1} mevcut ve $F^{-1}\in O(3,1)$'dir. $F\left(x_i\right)=y_i,i=1,2,3$ ifadesinden $F^{-1}\left(y_i\right)=x_i,i=1,2,3$ yazabiliriz. $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $O\left(3,1\right)$-*tek invaryant* polinom olduğundan

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=f\left(F^{-1}\left(y_1\right),F^{-1}\left(y_2\right),F^{-1}\left(y_3\right)\right)=\det F^{-1}.f\left(y_1,y_2,y_3\right)$ elde edilir.

Şimdi $z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}\in\Re^{3+1}$ ve $\delta=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det\delta=-1$ olan $\delta\in O\left(3,1\right)$ alalım.Buradan

$\delta z=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$ olur.Bu $\delta\in O\left(3,1\right)$'i $\left\{y_1,y_2,y_3\right\}$'e kullanırsak

$\delta y_i=y_i,i=1,2,3$ elde edilir.Buradan

$f\left(y_1,y_2,y_3\right)=f\left(\delta\left(y_1\right),\delta\left(y_2\right),\delta\left(y_3\right)\right)=\underbrace{\det\delta}_{-1}.f\left(y_1,y_2,y_3\right)=-f\left(y_1,y_2,y_3\right)$ olduğundan

$f\left(y_1,y_2,y_3\right)$=0 elde edilir. Böylece $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$=0 olur.O halde $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $O\left(3,1\right)$-*tek invaryant* polinom sıfırdır.

Sonuç olarak, ${T_{3+1}}^{3}$ durumunda keyfi invaryant polinom $\langle x_i, x_j \rangle, i, j = 1,2,3$'lerin polinomu olarak ifade edilebiliyor. Bu ${T_{3+1}}^{4}$'de doğru olduğundan ${T_{3+1}}^{m}$'de keyfi çift invaryant polinom $\langle x_i, x_j \rangle, i, j = 1,2,...,m$'lerin polinomu olarak ; keyfi tek invaryant polinom , φ-çift olmak üzere $\left[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4} \right].\varphi$ şeklinde tek invaryant polinomların toplamı olarak ifade edilebilir. ♦

Teorem 3: $x_1, x_2, ..., x_m$'ler M'de bilinmeyen vektörler olsun. Bu takdirde;

$\langle x_i, x_j \rangle, i, j = 1,2,...,m;\ i \leq j$ sistemi, $\Re\left[x_1, x_2, ..., x_m\right]^{O(3,1)}$ $\Re$-*cebir*'inin üreteç sistemidir.

İspat: Bu aslında Teorem 2'nin 1. kısmıdır. ♦

Teorem 4 : $x_1, x_2, ..., x_m$'ler M'de bilinmeyen vektörler olsun. Bu takdirde,

$\langle x_i, x_j \rangle, i, j = 1,2,...,m;\ i \leq j$ ve $\left[x_{i_1}\ x_{i_2} ... x_{i_4} \right];\ 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_4 \leq m$ sistemi,

$\Re\left[x_1, x_2, ..., x_m\right]^{SO(3,1)}$ $\Re$-*cebir*'inin üreteç sistemidir.

İspat: Bu teorem, Teorem2'in ve Önerme3'ün bir sonucudur. ♦

4. $O(3,1)$ Grubunun Yörüngeleri

Önerme 4: $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B \in O(3,0)$ olacak şekilde $A \in O(3,1)$ ortogonal dönüşüm mevcuttur.

İspat : $A \in GL(4,\mathbb{R})$ için $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B \in O(3,0)$ olsun. $A \in O(3,1)$ olduğunu göstermek için $A^T \eta A = \eta$ olduğunu ispatlayalım.

$$A^T \eta A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T B & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta$$

$I \in O(3,0)$, I-birim matris olduğundan $A \in O(3,1)$'dir.♦

Verilen $k \in \Re$ için,

$Y_k = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M : \langle x, x \rangle = k, x \neq 0\}$ kümesini gösterelim.

Önerme 5: $O(3,1)$ ortogonal grup olmak üzere,

i) $k \neq 0$ için Y_k, $k = 0$ için Y_0 ve $\{0\}$ kümeleri $O(3,1)$ grubunun yörüngeleridir.

ii) $O(3,1)$ grubunun bunlardan başka yörüngesi yoktur.

İspat :

i)

i.1) $k \neq 0$ için Y_k kümesini alalım.Burada $x \in Y_k$ için $\langle x, x \rangle = k$ denklemini inceleyelim.

i.1.1) $k > 0$ ve $x = (x_1, ..., x_4) \in M$ olsun. Bu takdirde,

$\langle x, x \rangle = k \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = k \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = k + x_4^2$ elde edilir. Burada $k + x_4^2 \neq 0$'dır. O zaman $k + x_4^2 = s^2$ ile gösterelim. Buradan $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s^2, s > 0$ olduğundan, bu $\Re^3$'te s-yarıçaplı küre denklemini verir. Bunu küresel koordinatlar dilinde, $x_1 = s\cos\alpha\sin\beta, x_2 = s\sin\alpha\sin\beta, x_3 = s\cos\beta$ şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi, şöyle

$$F_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(3,1)$$

alalım. Bunu x'e kullanırsak,

$F_1 x = (s, 0, 0, x_4) = \overline{x}$ elde edilir. $x \neq y$ olan $y \in Y_k$ alalım. Tanımdan $\langle y, y \rangle = k > 0$'dır. Bu y vektörü yukarıdaki gibi incelenirse, bir $F_2 \in O(3,1)$ için $F_2 y = (p, 0, 0, y_4) = \overline{y}$ elde edilir. Burada

$$F = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

alalım. Eğer $F\overline{x} = \overline{y}$ olacak şekilde $a^2 - b^2 = 1$ şartını sağlayan $a, b \in \mathbb{R}$'ler mevcut ise, [17,syf.60]'daki Önerme 31'den $F \in O(3,1)$ olup ispat biter. Şimdi bunu gösterelim.

$F\overline{x} = \overline{y}$'den $\left.\begin{aligned} as + bx_4 &= p \\ ax_4 + bs &= y_4 \end{aligned}\right\}$ elde edilir. Bu sistem çözülürse, $a = \dfrac{ps - x_4 y_4}{s^2 - x_4^2}, b = \dfrac{sy_4 - px_4}{s^2 - x_4^2}$ elde edilir.Burada $s^2 - x_4^2 \neq 0$'dır.Eğer $s^2 - x_4^2 = 0$ olsaydı, $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = 0$ olurdu ki bu ise

$\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle \neq 0$ ile çelişir. Burada $a^2 - b^2 = 1$ olduğundan, $F \in O(3,1)$ 'dir. Böylece $F_2^{-1} F F_1 \in O(3,1)$ olup $\left(F_2^{-1} F F_1 \right) x = y$ 'dir.Yani, $k > 0$ durumunda Y_k 'nın keyfi iki vektörü denktir.

i.1.2) $k < 0$ olsun. Bu durumda (i.1.1) kısmının ispatına benzer şekilde incelenirse, $k < 0$ durumunda Y_k 'nın keyfi iki noktasının denk olduğu görülür. Sonuçta, $\forall x \in M$ için $\langle x, x \rangle$, $O(3,1) - invaryant$ olduğundan Y_k 'daki bir nokta ,onun dışında başka bir noktaya denk değildir. Yani, $k \neq 0$ için Y_k kümesi $O(3,1)$ grubunun yörüngesidir.

i.2) $k = 0$ için $Y_0 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M : x \neq 0, \langle x, x \rangle = 0 \right\}$ kümesini alalım. $x \in Y_0$ olsun. Tanımdan $\langle x, x \rangle = 0, x \neq 0$ 'dır. Burada $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ olarak alırsak,

$$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \tag{2}$$

bulunur.

Burada $x_4 \neq 0$ 'dır. (Eğer $x_4 = 0$ olsaydı,

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Rightarrow x_i = 0, i = 1,2,3$ 'dır.Bu takdirde, $x = 0$ olup bu $x \neq 0$ ile çelişir.)

(2)'den $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$ elde edilir. Bu durum i.1.1'deki gibi incelenirse, bir $F_3 \in O(3,1)$ için $F_3 x = \left(x_4, 0, 0, \mp x_4 \right) = \overline{x}$ elde edilir. Şimdi $x \neq y$ olan $y \in Y_0$ alalım. Tanımdan $\langle y, y \rangle = 0$ 'dır.Bu y vektörü yukarıdaki gibi incelenirse, $F_4 \in O(3,1)$ için $F_4 y = \left(y_4, 0, 0, \mp y_4 \right) = \overline{y}$ elde edilir. Şimdi $F\overline{x} = \overline{y}$ olacak şekilde $F \in O(3,1)$ mevcut olduğunu gösterelim.

i.2.1) $\overline{x} = \left(x_4, 0, 0, x_4 \right)$ ve $\overline{y} = \left(y_4, 0, 0, y_4 \right)$ alalım. Bu takdirde

$$F = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in O(3,1)$$ mevcut, öyle ki $F\overline{x} = \overline{y}$ 'dir. Böylece $F_4^{-1} F F_3 \in O(3,1)$ olduğundan $\left(F_4^{-1} F F_3 \right) x = y$ 'dir.

i.2.2) $\overline{x}=\left(x_4,0,0,x_4\right)$ ve $\overline{y}=\left(y_4,0,0,-y_4\right)$ alalım. Bu takdirde

$F=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}\in O(3,1)$ mevcut, öyle ki $F\overline{x}=\overline{y}$ 'dir. Böylece $F_4^{-1}FF_3\in O(3,1)$

olduğundan $\left(F_4^{-1}FF_3\right)x=y$ 'dir.

Yani, $k=0$ durumunda Y_0 'ın keyfi iki vektörü denktir.

Sonuçta; $\forall x\in Y_0$ noktasını $y\in Y_0$ noktasına götürecek $O(3,1)$ ortogonal dönüşüm mevcut olduğundan Y_0 kümesinin keyfi iki elemanı $O(3,1)$-denktir. $y\in Y_0$ olsun. Eğer $y=0$ ise, $\{0\}$ nokta Y_0 'ın hiçbir noktasına $O(3,1)$-denk değildir. Eğer $y\notin Y_0$ ve $y\neq 0$ ise, $y\in Y_k$ bir $k\in\mathbb{R}, k\neq 0$ için $\langle x,x\rangle$, $O(3,1)-$*invaryant* olduğundan Y_0 'ın hiçbir noktası y-noktasına $O(3,1)$-denk olamaz. Dolayısıyla Y_0 kümesi $O(3,1)$ grubunun yörüngesidir.

i.3) $\{(0,0)\}$ noktası $\forall F\in O(3,1)$ için $F(0)=0$ olduğundan $\{0\}$ noktası $O(3,1)$ grubunun yörüngesidir.

ii) $\forall x\in\Re$ noktası alalım. $x=0$ ise, x-elemanı $\{0\}$ yörüngededir. $x\neq 0$ olsun. Bu taktirde bir $k\in\Re$ için $\langle x,x\rangle=k$ 'dır. Eğer $k=0$ ise $x\in Y_0$ 'dır. Eğer $k\neq 0$ ise, $x\in Y_k$ 'dır. $O(3,1)$ grubunun bunlardan başka yörüngesi yoktur. ♦

KAYNAKLAR

1. Başdaş, E.,(1997), "*Minkowski Uzayında Hareketler*", Ankara, Doktora Tezi, Ankara Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü.
2. Benz, W., (2003), "On Lorentz-Minkowski Geometry in real iner product Spaces", *Advenced in Geometry, Special Issue* 1-12.
3. Benz, W., (2004),"Metric and Periodic Lines in real Inner Space Geometries", *Monaths Math*., 141 ,1-10.
4. Borchers, H. J.and Hegerfeldt, G. C., (1972),"The Structure of Spacetime Transformations", *Communs. Math. Phys.,* 29, 3 ,259-266.
5. Ciğerim, Ü.,(1993),"*Sayılar ve Geometriler*", Ankara, Yüksek Lisans Tezi,Ankara Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü.
6. Callahan, James J.,(1999), "*The Geometry of Spacetime : An Introduction to Special and General Relativity"* ,New York, Springer-Verlag.
7. Das, A.,(1996), "*The Special Theory of Relativity: A Mathematical Exposition*", New York, Springer-Verlag.
8. Dieudonne, J. A. and Carrell, J. B.,(1971), "*Invariant Theory*", London, Old and New, Acad. Pres.
9. Ergin, A. A,(1989), "*Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri*", Ankara, Doktora Tezi, Ankara Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü.
10. Höfer, R.,(2006), "Metric Lines in Lorentz-Minkowski Geometry", *Aequationes Math*., 71,162-173.
11. Höfer, R.,(1999), "m-Point Invariants of Real Geometries", *Beitrage Algebra Geom*., 40,1,261-266.
12. Hilbert, D.,(1993), "*Theory of Algebraic Invariants*", New York ,Cambridge Univ. Press.
13. Khadjiev, Dj.,(1988), "*An Application of the Invariant Theory to the Differential Geometry"* , Tashkent, Fan Pub.
14. Launey, J.T. and Eywind, H. W.,(1997), "On the Causal Structure of Minkowski Spacetime", *J.Math.Phys*., 38, 10, 5044-5086.
15. Mal'Cev, A. I.,(1965), "*Foundations of Linear Algebra*", San Francisko, W.H.Freeman and Comp.
16. Naber, G. L.,(1992), "*The Geometry of Minkowski Spacetime*", New York ,Springer-Verlag.

17. Ören,İ.,(2004), “Minkowski Uzayzaman Geometrisinde Noktaların İnvaryantları”, Trabzon,Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü.
18. Ören, İ.,(2006), “The Conditions of Equivalance of Points for Orthogonal and Lorentz Group on the 2-Dimensional Minkowski Spacetime”, *IV.International Geometry Symposium*, Zonguldak, Abstracts, 76.
19. Rowe,E. G. P.,(2001), “*Geometrical Physics in Minkowski Spacetime*”, London, Springer-Verlag.
20. Springer, T. A.,(1977), “*Invariant Theory*”, New York, Springer-Verlag.
21. Study,E.,(1897), “The first main theorem for orthogonal vector invariants”, Wissensch, *Ber. Sachs. Akad.*, 136.
22. Weyl, H.,(1946),“*The Classical Groups, Their Invariants and Representations”* ,New Jersey, Princeton Univ. Pres.