21. Ulusal Matematik Sempozyumu Bildiriler Kitabı B.1-13

n-BOYUTLU DİJİTAL GÖRÜNTÜLERİN HOMOLOJİ GRUBU

Havana ARSLAN*, İsmet KARACA†, Ahmet ÖZTEL ‡
Ege Üniversitesi Matematik Bölümü
Bornova, İzmir, 35100, Türkiye

Özet

Topolojik invaryantlar, dijital görüntüler ve geometrik modelleme ile bağlantılı birçok uygulama alanında son derece kullanışlıdır. Bu nedenle dijital görüntüler, topolojinin ve cebirsel topolojinin metodları ile incelenmeye başlanmıştır. Bu çalışmada n-boyutlu dijital görüntülerin arasındaki farklılıkları ve benzerlikleri daha net bir şekilde ortaya koyabilmek için cebirsel topolojideki simplicial homoloji metodunun n-boyutlu dijital görüntülerin homoloji gruplarının inşasında nasıl kullanıldığı gösterildi. Sonuç olarak MSS_{18} in homoloji grupları hesaplandı.

1 Giriş

Son yıllarda teknoloji ve bilgisayar bilimlerinin gelişmesi ile birlikte dijital görüntü ve görüntü analizinin önemi artmıştır. Dijital görüntü analizi bilgisayar grafiği, bilgisayarlı tomografi, çevre bilimleri (meteoroloji, jeoloji), akışkanlar mekaniğini içeren bilim dalları, x-raydaki tümörler gibi alanlarda önemlidir [9]. Bu nedenle topoloji metodlarından yararlanarak dijital topoloji inşa edilmiştir. Dijital topoloji, topolojik özellikler kullanarak dijital görüntülerin ya da nesnelerin analizini yapmamızda yardımcı olur.

Dijital topoloji kavramı ilk kez 1979 yılında bilgisayar görüntü analizi araştırmacısı Azriel Rosenfeld tarafından ortaya atılmıştır ([10]). Rosenfeld'in

*E-mail: havanars@hotmail.com
†E-mail: ismet.karaca@ege.edu.tr
‡E-mail: ahmet_oztel@hotmail.com

yakınlık bağıntısını tanımlamasıyla birlikte topoloji kavramları dijital topoloji için daha kullanışlı hale gelmiştir. T.Y. Kong [8] çalışmasında dijital temel grup kavramını inşa etmiş, L.Boxer [2] çalışmasında klasik cebirsel topoloji metodlarının dijital temel grubun inşasında kullanılabileceğini göstermiştir. İki farklı dijital görüntünün izomorfik temel gruplara sahip olduğuna karar veren bir algoritma görüntü analizi için önemli olduğundan Q.F. Stout ([13]) bu problemle uğraşmıştır.

Cebirsel topolojide homoloji gruplarının hesaplanması yüksek homotopi gruplarının hesaplanmasından daha kolaydır. Dijital topolojide de cebirsel topolojide olduğu gibi homoloji gruplarının tanımı homotopi gruplarının tanımından daha incelikli ve daha az sezgisel olduğundan dijital görüntülerin homoloji gruplarının çalışılması homotopi gruplarının çalışılmasına tercih edilmiştir.

Bu çalışmada cebirsel topolojideki simplicial homoloji metodu ile n boyutlu dijital görüntülerin homoloji grupları hesaplanmıştır. Örnek olarak MSS_{18} in homoloji grubu hesaplanmıştır.

2 Ön Bilgiler

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi ve $\mathbb{Z}^n$ n boyutlu Euclid uzayında kafes noktalarının kümesi olsun. Bir (ikili) dijital görüntü, yakınlık bağıntısı ile $\mathbb{Z}^n$ nin bir alt kümesidir. Yakınlık bağıntısı dijital görüntülerin çalışılmasında kullanılır.

Tanım 2.1. *[1, 11] $1 \leq l \leq n$ pozitif tam sayısı ve $p = (p_1, ..., p_n)$, $q = (q_1, ..., q_n) \in \mathbb{Z}^n$ ayrık iki nokta için;*

1. *$|p_i - q_i| = 1$ olacak şekilde en çok l kadar i indisi var ve*

2. *$|p_j - q_j| \neq 1$ olacak şekilde diğer tüm j indisleri için $p_j = q_j$*

koşulları sağlanıyorsa p ve q ya c_l-yakın denir.

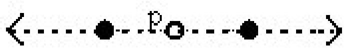
Burada c_l-yakın dediğimizde bir noktanın yakın olan noktalarının sayısını anlayacağız ve genel olarak bu yakınlığa κ-yakınlık adını vereceğiz. κ- yakınlık bağıntısını [7];

$$\kappa \in \left\{3^n(n \geq 2),\ 3^n - \sum_{t=0}^{r-2} C_t^n 2^{n-t} - 1(2 \leq r \leq n-1, n \geq 3),\ 2n(n \geq 1)\right\}$$

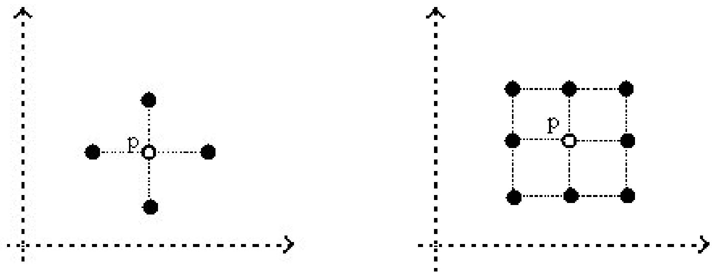
ile de belirleyebiliriz. Örnek olarak; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ ve $\mathbb{Z}^3$ de yakınlık bağıntıları sırasıyla Şekil 1, 2, 3 de gösterilmiştir.

Bir dijital aralık $a, b \in \mathbb{Z}, a \leq b$ olmak üzere,

$$[a, b]_{\mathbb{Z}} = \{z \in \mathbb{Z} : a \leq z \leq b\}$$



Şekil 1: $c_1 := 2$- yakın



Şekil 2: $c_1 := 4$-yakın ve $c_2 := 8$-yakın

şeklinde tanımlanır.

Herhangi bir kafes noktasının κ-komşuluğu ise bu noktaya κ-yakın olan noktaların kümesidir. $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ dijital görüntüsü ve $\varepsilon \in \mathbb{N}$ olsun. Dijital görüntünün x_0 elemanın ε yarıçaplı κ-komşuluğu, $l_\kappa(x_0, x)$, x_0 dan x e en kısa basit κ-yolunun uzunluğu olmak üzere;

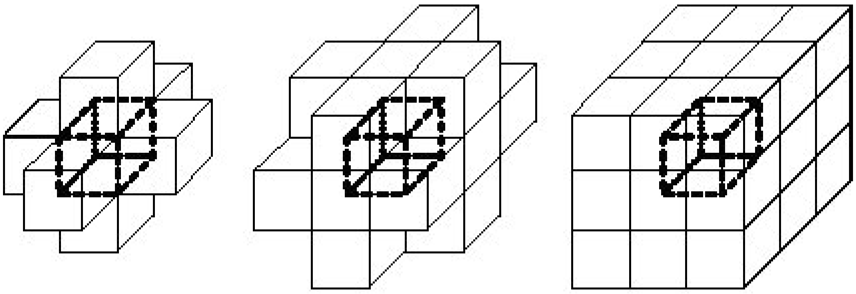
$$N_\kappa(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid l_\kappa(x_0, x) \leq \varepsilon\} \cup \{x_0\}$$

şeklinde tanımlanır [7]. $\mathbb{Z}^n$ de κ-yakınlık bağıntısı tanımlı ve $X \subset \mathbb{Z}^n$ bir dijital görüntü olsun. $\forall x, y \in X, x \neq y$ için $x = x_0, y = x_r$ ve $i = 0, 1, \ldots, r-1$ iken x_i ile x_{i+1} κ-yakın olacak şekilde dijital görüntü X in bir $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$ altkümesi var ise X dijital görüntüsüne *κ-bağlantılı* denir.

Tanım 2.2. *[1, 11] $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$, $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$, (X, κ_0) ve (Y, κ_1) dijital görüntüler olsun. X in her κ_0-bağlantılı U alt kümesi için $f(U)$, Y de κ_1-bağlantılı ise $f : X \to Y$ fonksiyonuna dijital (κ_0, κ_1)-süreklidir denir.*

Önerme 2.1. *[2] $f : X \to Y$ fonksiyonu dijital (κ_0, κ_1)-sürekli olabilmesi için gerek ve yeter şart X in her $\{x_0, x_1\}$ κ_0-yakın noktaları için $f(x_0) = f(x_1)$ ya da $f(x_0)$ ile $f(x_1)$ κ_1-yakın olmasıdır.*

X in her κ-bağlantılı alt kümesi, κ-bağlantılılık tanımından dolayı, birbirine κ-yakın ikililerin birleşiminden oluşacağından tanıma denk olduğu açıktır.



Şekil 3: $c_1 := 6$, $c_2 := 18$ ve $c_3 := 26$-yakın

Boxer [1] ve [2] makalelerinde homeomorfizma kavramını "$f : (X, \kappa_0) \to (Y, \kappa_1)$ *fonksiyonu dijital* (κ_0, κ_1)*-sürekli, bijektif ve* f^{-1} *dijital* (κ_1, κ_0)*-sürekli ise f ye dijital* (κ_0, κ_1)*-homeomorfizma denir.*" şeklinde tanımlanmıştır. Dijital homeomorfizma topolojideki tanımıyla aynı şekilde tanımlanmış olsa da uygulamada farklılık göstermektedir. Bu nedenle L.Boxer [4] de dijital homeomorfizma kavramı yerine dijital izomorfizma kavramını kullanmayı önermiştir. $\mathbb{R}$ deki topolojide bütün kapalı aralıklar birbirine homeomorf iken $\mathbb{Z}$ deki dijital topolojide dijital aralıklar dijital homeomorf değildir. Örneğin;

$$[1, 3]_{\mathbb{Z}} = \{1, 2, 3\} \text{ ve } [2, 5]_{\mathbb{Z}} = \{2, 3, 4, 5\}$$

dijital aralıkları birbirine dijital $(2, 2)$-homeomorf değildir. Bu nedenle bu çalışmada dijital homeomorfizma yerine dijital izomorfizma tanımını kullanacağız. Benzer şekilde homotopi kavramıda dijital görüntülerde tanımlanmaya çalışılmıştır. Bu tanımlamayı yaparken araştırmacıların karşısına çıkan sorun iki dijital görüntünün kartezyen çarpımının oluşturduğu yeni dijital görüntünün üzerinde tanımlı yakınlık bağıntısının tespit edilememesi ve sürekli olması gereken homotopi fonksiyonunun inşa edilememesidir. Bu problemi Boxer [3], Tanım 2.3 deki 2 ve 3 koşullarını ekleyerek çözmüştür.

Tanım 2.3. *[3]* $f, g : (X, \kappa_0) \to (Y, \kappa_1)$ *fonksiyonlar olsunlar. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir* $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \to Y$ *fonksiyonu ve m pozitif tamsayısı varsa f ve g ye dijital* (κ_0, κ_1)*- homotopik denir.* $f \simeq_{(\kappa_0, \kappa_1)} g$ *ile gösterilir.*

1. $\forall x \in X$ *için* $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, m) = g(x)$,

2. $\forall x \in X$ *için* $H_x : [0, m]_{\mathbb{Z}} \to Y$, $\forall t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}, H_x(t) = H(x, t)$ *fonksiyonu dijital* $(2, \kappa_1)$*-sürekli,*

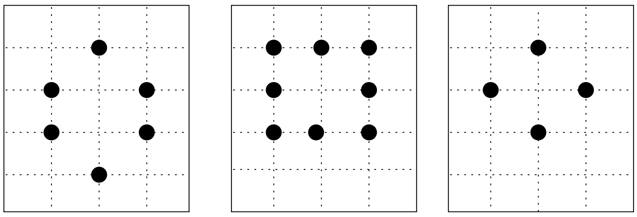
3. $\forall t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ *için* $H_t : X \to Y$,$\forall x \in X, H_t(x) = H(x, t)$ *fonksiyonu dijital* (κ_0, κ_1)*-sürekli.*

Önerme 2.2. *[3] Dijital izomorfizma ve dijital homotopi kavramları dijital görüntülerde birer denklik bağıntısıdır.*

Benzer olarak birçok kavramda topolojiden ve cebirsel topolojiden yararlanılarak aktarılmıştır. Aşağıdaki tanımlar [2, 7, 11] referanslarında verilmiştir;

Tanım 2.4. $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ *dijital görüntüsünde* x *noktasından* y *noktasına bir* κ*-yolu,* $f : [0, m]_{\mathbb{Z}} \longrightarrow X$, $f(0) = x$, $f(m) = y$ *olacak şekildeki dijital* $(2, \kappa)$*-sürekli fonksiyonudur. Eğer* $f(0) = f(m)$ *ise* f *ye kapalı* κ*-yolu denir.*

Tanım 2.5. *"*$f(i)$ *ile* $f(j)$ κ*-yakın olması için gerek ve yeter şart* $j = i \pm 1$ mod m *olmasıdır" özelliğini sağlayacak şekilde dijital* $(2, \kappa)$*-sürekli fonksiyon* $f : [0, m-1]_{\mathbb{Z}} \longrightarrow X \subset \mathbb{Z}^2$ *varsa* $\{f(0), f(1), \ldots, f(m-1)\}$ *kümesine basit kapalı* κ*-eğri denir. Bilinen basit kapalı eğriler Şekil 4 de gösterilmiştir.*



Şekil 4: MSC_8, MSC_4, MSC'_8

Tanım 2.6. (X, κ) *dijital görüntü olsun.* $x \in X$ *noktasının kendisine yakın olan iki* $y, z \in X$ *noktaları için bu noktalarda birbirlerine* κ*-yakın ise* x *noktasına* X *in* κ*-köşe noktası denir.* X *deki tüm* κ*-köşeleri çıkardığımızda geriye kalan şekil basit kapalı* κ*-eğri ise* X *e genelleştirilmiş basit kapalı* κ *denir.*

Tanım 2.7. $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n, n \geq 3$ *dijital görüntü ve* $\bar{X} = \mathbb{Z}^n - X$ *olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa* X *e kapalı* κ*-yüzey denir.*

1. $(\kappa, \bar{\kappa}) \in \{(\kappa, 2n), (2n, 3^n - 1)\}$ *ve* $\kappa \neq 3^n - 2^n - 1$ *için;*

   - *Her* $x \in X$ *için* $| X |^x := N_{26}(x, 1) - \{x\}$ *kümesi* x *e* κ*-yakın olan bir tane eleman içerir.*
   - $| \bar{X} |^x$, x *e* $\bar{\kappa}$*-yakın iki tane* $\bar{\kappa}$ *bileşene sahiptir. (Bu bileşenleri* C^{xx} *ve* D^{xx} *ile gösterelim.)*
   - *Her* $y \in N_{\kappa} \cap$ *için* $N_{\bar{\kappa}} \cap C^{xx} \neq \emptyset$ *ve* $N_{\bar{\kappa}} \cap D^{xx} \neq \emptyset$ *dir.*

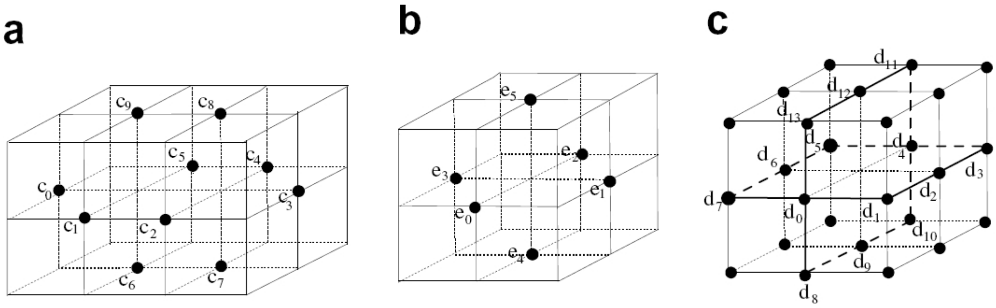
   Ayrıca X *kapalı* κ*-yüzeyi için,* X *basit* κ*-noktaya sahip değil ise* X *e basit kapalı* κ*-yüzey denir.*

2. $(\kappa, \bar{\kappa}) = (3^n - 2^n - 1, 2n)$ *için;*

- *X, κ-bağlantılı*
- *Her $x \in X$ için $\mid X \mid^x$ genelleştirilmiş basit kapalı eğri*

Ayrıca $\mid X \mid^x$ basit kapalı κ eğri ise X e basit kapalı κ-yüzey denir.

Bilinen dijital basit kapalı yüzeyler Şekil 5 de verilmiştir.



Şekil 5: (a) MSS_{18}, (b) MSS'_{18} ve (c) MSS_6

Tanım 2.8. *$f : X \longrightarrow Y$ dijital (κ_0, κ_1)-sürekli fonksiyon olsun. $g \circ f \simeq_{(\kappa_0,\kappa_1)} 1_X$ ve $f \circ g \simeq_{(\kappa_1,\kappa_0)} 1_Y$ olacak şekilde $g : Y \rightarrow X$ dijital (κ_1, κ_0)-sürekli fonksiyonu varsa f ye dijital (κ_0, κ_1)- homotopi denktir denir*

Tanım 2.9. *(X, κ_0) dijital görüntü olsun. (X, κ_0) üzerindeki birim dönüşüm sabit dönüşüme (κ_0, κ_0)-homotop ise X e κ_0-büzülebilir denir.*

Tanım 2.10. *$\emptyset \neq A \subset X$ ve $i : A \hookrightarrow X$ κ_0-kapsama dönüşümü olsun. $\forall a \in A$, $r \circ i(a) = a$ olacak şekilde $r : X \rightarrow A$ dijital κ_0 sürekli fonksiyonu varsa X e κ_0-retract denir.*

Bu kavramlar her ne kadar aynı gözükse de çalıştığımız nesneler yani dijital görüntüler sonlu olduğundan dolayı farklı sonuçlar elde edilebilmektedir.

3 Dijital Görüntülerin Homoloji Grubu

Tanım 3.1. *$P = \{p_0, p_1 \ldots, p_m\} \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ da bir dijital görüntü olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa P ye dijital (κ, m)-simpleks denir;*

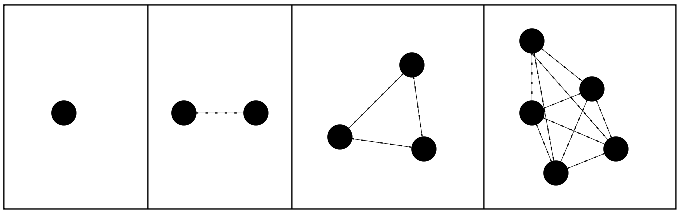
1. $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ *farklı elemanlar ve* $t_i \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere*

$$\sum_{i=1}^{m} t_i p_i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{t_i} = 0 \;\; \text{ise} \;\; \mathrm{t_0} = \mathrm{t_1} = \cdots = \mathrm{t_m} = 0 \;\; \text{dir.}$$

2. *Her* $i, j \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $i \neq j$ *için* p_i *ve* p_j κ*-yakın.*

$P = \langle p_0, p_1 \ldots, p_m \rangle$ *ile gösterilir ve* m *ye simpleksin boyutu denir.*

Bu durumda bazı simpleksler Şekil 6 da (ki bütün noktalar birbirine sırasıyla $2, 2, 8, 26$-yakın olmak üzere) gösterilmiştir.



Şekil 6: Sırasıyla (2,0), (2,1), (8,2), (26,4)-simpleksler

Tanım 3.2. *Aşağıdaki özellikleri sağlayan* $P = \{p_0, p_1 \ldots, p_m\} \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ *da dijital* (κ, m)*-simplekslerinin sonlu kolleksiyonu* K *ya dijital simpleksler kompleksi denir.*

1. $s \in K$ *ise* s *nin yüzüde bu simpleksler kompleksine aittir.(*s *nin yüzü,* $\{p_0, p_1 \ldots, p_m\}$ *nin bir alt kümesi tarafından gerilen herhangibir simplekstir.)*

2. $s, t \in K$ *iken* $s \cap t$ *boş ya da* s *ve* t *nin ortak bir dijital simpleksi vardır.*

Tanım 3.3. *Dijital simpleksler kompleks* (K, κ) *ya ait köşeler kümesine üzerinde bir sıralama var ise* (K, κ) *ya yönlü dijital simpleksler kompleksi denir.*

Tanım 3.4. (K, κ) *bir dijital simpleksler kompleksin geometrik reelizasyonu* $|K|$*, tüm dijital simplekslerin birleşimi olarak tanımlanır. Yani*

$$|K| = \bigcup_{s \in K} s.$$

Dijital görüntüler aynı zamanda $(\kappa, 0)$-simplekslerin birleşimi gibi düşünülebilir. Bu durumda her dijital görüntü bir dijital simpleksler komplekstir.

Tanım 3.5. *(X, κ_0) bir dijital görüntü olsun. Bir simpleksler komplesi (K, κ_1) ve $h : |K| \longrightarrow X$ (κ_0, κ_1)-izmorfizması varsa X dijital görüntüsü çok yüzlüdür denir.*

Bu durumda dijital görüntülerin çok yüzlüsü yerine kendisiyle doğrudan çalışılabilir.

Önerme 3.1. *$P \subset (\mathbb{Z}^{n_0}, \kappa_0)$, $Q \subset (\mathbb{Z}^{n_1}, \kappa_1)$ sırasıyla dijital (κ_0, m) ve (κ_1, m) simpleksler olsun. O zaman P ve Q dijital (κ_0, κ_1)-izomorfiktirler.*

İspat: $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ ve $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$ olsun.

$$h : (P, \kappa_0) \longrightarrow (Q, \kappa_1),\ p_i \mapsto h(p_i) = q_i$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm her $p_i \in P$ için dijital (κ_0, κ_1)-izomorfizmdir. $\square$

O halde elimizdeki simpleks yapısı ile serbest değişmeli grupları inşa edebiliriz.

Tanım 3.6. *$C_q^{\kappa}(K)$, dijital sipmleksler kompleksi (K, κ) deki dijital (κ, q)-simpleksleri baz kabul eden serbest değişmeli gruptur.*

Tanım 3.7. *$(K, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ da m boyutlu yönlü dijital simpleksler kompleksi olsun. $\hat{p}_i$, p_i elemanının simpleksten çıkarılması olmak üzere;*

$$\partial_q : C_q^{\kappa}(K) \longrightarrow C_{q-1}^{\kappa}(K)$$

$$\partial_q(< p_0, p_1, \ldots, p_q >) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{q} (-1)^i < p_0, p_1, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_q >, & m \geq q \\ 0, & m < q \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan operatöre sınır operatörü denir.

Tanımdan aşağıdaki önermeyi verebiliriz;

Önerme 3.2. *$m \geq q$ için $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ dir.*

İspat: Her $\langle p_0, p_1, \ldots, p_q \rangle \in C_q^{\kappa}(K)$ için;

$$\begin{aligned}
\partial_{q-1} \circ \partial_q(\langle p_0, p_1, \ldots, p_q \rangle) &= \partial_{q-1}(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \langle p_0, \ldots, \widehat{p_i}, \ldots, p_q \rangle) \\
&= \sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \langle p_0, \ldots, \widehat{p_j}, \ldots, \widehat{p_i}, \ldots, p_q \rangle) \\
&= \sum_{i<j}(-1)^{i+j} \langle p_0, \ldots, \widehat{p_i}, \ldots, \widehat{p_j}, \ldots, p_q \rangle \\
&+ \sum_{j \leqslant i}(-1)^{i+j} \langle p_0, \ldots, \widehat{p_j}, \ldots, \widehat{p_i}, \ldots, p_q \rangle \\
&= \sum_{i<j}[(-1)^{i+j} + (-1)^{i+j+1}] \langle p_0, \ldots, \widehat{p_i}, \ldots, \widehat{p_j}, \ldots, p_q \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Bu önermenin bir sonucu olarak, (K, κ) m boyutlu yönlü dijital simpleksler kompleksi için;

$$C_*^{\kappa}(K) \ : \ 0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m^{\kappa}(K) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}^{\kappa}(K) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0^{\kappa}(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

bir *zincir komplekstir.*

Bir yönlü dijital simpleksler kompleksinin homoloji grubunu şöyle tanımlarız;

Tanım 3.8. (K, κ) *, m-boyutlu yönlü dijital simpleksler kompleks olsun.*

1. $Z_q^{\kappa}(K) = \mathrm{Ker}\ \partial_{\mathrm{q}}$ *grubuna κ-yakınlıklı q. devir grubu denir*
2. $B_q^{\kappa}(K) = \mathrm{Im}\ \partial_{\mathrm{q+1}}$ *grubuna κ-yakınlıklı q. sınır grubu denir.*
3. $H_q^{\kappa}(K) = Z_q^{\kappa}(K)/B_q^{\kappa}(K)$ *bölüm grubuna κ-yakınlıklı q. dijital homoloji grubu denir.*

Böylece cebirsel topolojide artık aksiyom haline gelmiş teoremlerin dijital topolojideki karşılıklarını inceleyebiliriz:

Teorem 3.1. *$f : X \to Y$ dijital (κ_0, κ_1)-izomorfizm ise $\forall m \geq q$ için $H_q^{\kappa_0}(X) \cong H_q^{\kappa_1}(Y)$ dir.*

İspat: $f : X \to Y$ bir dijital (κ_0, κ_1)-izomorfik dönüşüm olsun. Bu durumda, f bijeksiyon ve Önerme 2.1 den dolayı "$x_1, x_2 \in X$, x_1 ve x_2 , κ_0-yakın $\Leftrightarrow$ $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ κ_1- yakın ya da $f(x_1) = f(x_2)$" koşulunu sağlar. $m \geq q \geqslant 0$ olsun. $\langle p_0, p_1, \ldots, p_q \rangle \in C_q^{\kappa_0}(X)$ için;

$$\phi : C_q^{\kappa_0}(X) \longrightarrow C_q^{\kappa_1}(Y), \qquad \phi(\langle p_0, p_1, \ldots, p_q \rangle) = \langle f(p_0), f(p_1), \ldots, f(p_q) \rangle$$

şeklinde tanımlanır. ϕ dönüşümü f nin tanımından dolayı iyi tanımlı ve bijeksiyondur. Böylece $C_q^{\kappa_0}(X) \cong C_q^{\kappa_1}(Y)$ elde edilir. Sonuç olarak

$$H_q^{\kappa_0}(X) \cong H_q^{\kappa_1}(Y).$$

□

Teorem 3.2. *(X, κ) tek noktalı dijital görüntü ise*

$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

İspat: $X = \{x_0\}$ olsun. $m \geq q > 0$ için X in kapsadığı dijital (κ, q)-simpleks olmadığından dolayı $C_q^{\kappa}(X) = 0$ dir. Böylece , $H_q^{\kappa}(X) = 0$ dir. $q = 0$ olsun. $C_0^{\kappa}(X)$, dijital $(\kappa, 0)$-simpleks bazlı serbest değişmeli grup olduğundan $C_0^{\kappa}(X) \cong \mathbb{Z}$ dir. $\partial_1 : 0 \longrightarrow C_0^{\kappa}(X) \cong \mathbb{Z}$ ve $\partial_0 : C_0^{\kappa}(X) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ olduğundan $\text{Im}\ \partial_1 = 0$, ve $\text{Ker}\ \partial_0 \cong \mathbb{Z}$ dir. Böylece $H_0^{\kappa}(X) \cong \mathbb{Z}$ dir. □

Aşağıdaki teoremin ispatı, Cebirsel Topolojideki teoremin ispatının benzeridir.

Teorem 3.3. *Bileşenleri κ-bağlantılı $\{X_\lambda : \lambda \epsilon \Lambda\}$ alt kümeler olan X dijital görüntüsünün homoloji grubu*

$$H_q^{\kappa}(X) \cong \bigoplus_{\lambda} H_q^{\kappa}(X_\lambda).$$

Teorem 3.4. *X dijital basit kapalı κ-eğri ise*

$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0,\ 1 \\ 0, & q \neq 0,\ 1. \end{cases}$$

İspat: $X = \{x_0, x_1 \ldots, x_q\} \subset \mathbb{Z}^2$ bir dijital basit kapalı κ-eğri olsun. Dijital basit kapalı κ-eğri tanımından x_i ve x_j κ-yakın $\Leftrightarrow i = j \pm 1 \mod q$ dir. Böylece

$$C_0^{\kappa}(X) = \{\langle x_0 \rangle, \langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \ldots, \langle x_q \rangle\} \cong \mathbb{Z}^{q+1}$$

$$C_1^\kappa(X) = \{\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_q, x_0\rangle\} \cong \mathbb{Z}^{q+1} \text{ dir.}$$

$m > q > 1$ için $C_q^\kappa(X) = 0$ olduğundan $H_q^\kappa(X) = 0$ dir.

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisinden $\operatorname{Im}\partial_2 = 0$ ve $\operatorname{Ker}\partial_0 = \mathbb{Z}^{q+1}$ olduklarını görürüz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\partial_1(a_0\langle x_0, x_1\rangle + a_1\langle x_1, x_2\rangle + \ldots + a_q\langle x_q, x_0\rangle) &= a_0(x_1 - x_0) + a_1(x_2 - x_1)\\ &\quad + \ldots + a_q(x_0 - x_q)\end{aligned}$$

eşitliğinden $\operatorname{Im}\partial_1 = \mathbb{Z}^q$ dir.

$$\begin{aligned}&\partial_1(a_0\langle x_0, x_1\rangle + a_1\langle x_1, x_2\rangle + \ldots + a_q\langle x_q, x_0\rangle) = 0\\ &a_0(x_1 - x_0) + a_1(x_2 - x_1) + \ldots + a_q(x_0 - x_q) = 0\\ &(a_q - a_0)x_0 + (a_0 - a_1)x_1 + \ldots + (a_{q-1} - a_q)x_q = 0\end{aligned}$$

son eşitlik çözüldüğünde $a_0 = a_1 = \ldots = a_q$ olur. Buradan $\operatorname{Ker}\partial_1 = \mathbb{Z}$ dir. Sonuç olarak, $H_1^\kappa(X) = \mathbb{Z} = H_0^\kappa(X)$. □

Bir dijital görüntü X bir başka dijital görüntü Y'ye dijital homotopi denk iken $H_q^{\kappa_0}(X)$ ve $H_q^{\kappa_1}(Y)$ izomorf olmayabilirler. Buna [5] deki Örnek 3.11'yi verebiliriz;

$$MSC_8' = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$$

dijital basit kapalı 8 eğri (Şekil 4), 8-büzülebilir bir eğridir ([7]). Bu nedenle tek noktalı uzaya dijital (8,8)-homotopi denktir. Yukarıdaki teoremlerden de anlaşıldığı üzere $H_1^8(MSC_8') = \mathbb{Z}$ ve $H_1^8(\{*\}) = 0$ dir. Sonuç olarak $MSC_8 \simeq_{(8,8)} \{*\}$ iken $H_1^8(X)$ ve $H_1^8(\{*\})$ izomorfik değildir. □

Örnek: [5] $X = \{p_o = (0,0), p_1 = (1,0), p_2 = (1,1)\}$ ve $(X, 8)$ yönlü $(p_0 < p_1 < p_2)$ simplekler kompleksini ele alalım ve 8-yakınlıklı homoloji gruplarını hesaplamaya çalışalım. Burada; $C_0^8(X)$ grubu

$$\{\langle p_0\rangle,\ \langle p_1\rangle,\ \langle p_2\rangle\},$$

$C_1^8(X)$ grubu

$$\{\langle p_0p_1\rangle,\ \langle p_1p_2\rangle,\ \langle p_0p_2\rangle\}$$

ve $C_2^8(X)$ grubu,

$$\{\langle p_0p_1p_2\rangle\}$$

ile üretilen serbest değişmeli gruplardır. Bu durumda

$$C_0^8(X) \cong \mathbb{Z}^3, \quad C_1^8(X) \cong \mathbb{Z}^3, \quad \text{ve} \quad \mathrm{C}_2^8(\mathrm{X}) \cong \mathbb{Z}.$$

Böylece serbest değişmeli gruplar dizisini elde ederiz;

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2^8(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1^8(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^8(X) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Bu kısa diziden, Ker $\partial_2 = 0$, Ker $\partial_1 = \mathbb{Z}^2$, Ker $\partial_0 = \mathbb{Z}^3$, Im $\partial_3 = 0$, Im $\partial_2 = \mathbb{Z}$, Im $\partial_1 = \mathbb{Z}^2$ eşitliklerini elde ediliriz. Sonuç olarak;

$$H_q^8(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0,\ 1 \\ 0, & q \neq 0,\ 1. \end{cases}$$

Örnek: Şekil 5 de görülen

$$\begin{aligned} MSS_{18} \cong \{ & c_0 = (0,0,1), c_1 = (-1,1,1), c_2 = (-2,0,1), c_3 = (-2,-1,1) \\ & c_4 = (-1,-2,1), c_5 = (0,-1,1), c_6 = (-1,0,0), c_7 = (-1,-1,0) \\ & c_8 = (-1,0,2), c_9 = (-1,-1,2)\} \end{aligned}$$

dijital yüzeyinin homoloji grubunu hesaplayalım. Öncelikle serbest değişmeli grupları belirleyelim. $C_0^{18}(MSS_{18})$ serbest değişmeli grubu

$$\{\langle c_0\rangle,\ \langle c_1\rangle, \ldots,\ \langle c_9\rangle\}$$

$(18,0)$-simpleksleri ile üretilir. $C_1^{18}(MSS_{18})$ serbest değişmeli grubu

$$\begin{aligned} \{ & \langle c_0c_1\rangle,\ \langle c_1c_2\rangle,\ \langle c_2c_3\rangle,\ \langle c_3c_4\rangle, \langle c_4c_5\rangle,\ \langle c_5c_0\rangle,\ \langle c_6c_7\rangle,\ \langle c_8c_9\rangle,\ \langle c_9c_0\rangle,\ \langle c_0c_6\rangle, \\ & \langle c_1c_9\rangle,\ \langle c_6c_1\rangle,\ \langle c_2c_8\rangle,\ \langle c_7c_2\rangle,\ \langle c_3c_8\rangle,\ \langle c_7c_3\rangle, \langle c_4c_8\rangle,\ \langle c_7c_4\rangle,\ \langle c_5c_9\rangle,\ \langle c_6c_5\rangle, \\ & \langle c_2c_6\rangle,\ \langle c_5c_8\rangle\} \end{aligned}$$

$(18,1)$-simpleksleri ile üretilir. $C_2^{18}(MSS_{18})$ serbest değişmeli grubu

$$\begin{aligned} \{ & \langle c_0c_1c_9\rangle,\ \langle c_0c_6c_1\rangle,\ \langle c_0c_6c_5\rangle,\ \langle c_9c_0c_5\rangle, \langle c_3c_4c_8\rangle,\ \langle c_7c_3c_4\rangle,\ \langle c_2c_3c_8\rangle,\ \langle c_7c_2c_3\rangle, \\ & \langle c_1c_2c_6\rangle,\ \langle c_2c_6c_7\rangle,\ \langle c_4c_5c_8\rangle,\ \langle c_5c_8c_9\rangle\} \end{aligned}$$

$(18,2)$-simpleksleri ile üretilir. Böylece aşağıdaki kısa diziyi elde ederiz;

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2^8(MSS_{18}) \xrightarrow{\partial_2} C_1^8(MSS_{18}) \xrightarrow{\partial_1} C_0^8(MSS_{18}) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Bu kısa diziden, Ker $\partial_2 = 0$, Ker $\partial_1 \cong \mathbb{Z}^{13}$, Ker $\partial_0 \cong \mathbb{Z}^{10}$, Im $\partial_3 = 0$, Im $\partial_2 \cong \mathbb{Z}^{12}$, Im $\partial_1 \cong \mathbb{Z}^9$ elde edilir. Dolasıyla

$$H_q^{18}(MSS_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0,\ 1 \\ 0, & q \neq 0,\ 1. \end{cases}$$

homoloji gruplarını elde ederiz.

4 Teşekkür

Bu makaleyi daha anlaşılır hale getirilmesinde katkıları bulunan anonim hakemlerine teşekkür ederiz. Bu çalışma 107T912 nolu proje kapsamında Tübitak tarafından desteklenmektedir.

Kaynaklar

[1] L. Boxer, Digitally continuous functions, Pattern Recognition Letters,15(1994), p.833–839.

[2] L. Boxer, A classical construction for the digital fundamental group, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 10(1999), p.51–62.

[3] L. Boxer, Properties of digital homotopy, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 22(2005), p.19–26.

[4] L. Boxer, Digital products, wedges, and covering spaces, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 25(2006), p.159–171.

[5] L. Boxer and I.Karaca, Homology groups of two dimensional digital images, 2007, preprint.

[6] L. Boxer and I.Karaca, The classification of digital covering spaces, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 32(2008), p.23–29.

[7] S.E. Han, Connected sum of digital closed surfaces, Information Sciences, 176(2006), p.332–348.

[8] T.Y. Kong, A digital fundamental group, Computers and Graphics, 13(1989), p.159–166.

[9] T.Y. Kong, A.W. Roscoe, and A. Rosenfeld, Concepts of digital topology, Topology and its Applications, 46 (1992), p.219–262.

[10] A. Rosenfeld, Digital topology, American Mathematical Monthly, 86(1979), p.76–87.

[11] A. Rosenfeld, 'Continuous' functions on digital pictures, Pattern Recognition Letters, 4(1986), p.177–184.

[12] E.H. Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill, New York, 1966.

[13] Q.F. Stout, Topological matching , Proceedings 15^{th} Annual Symposium on Theory of Computing, 1983 , p.24–31